Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (calcul du rayon de convergence). [ ]

1. Déterminer le rayon de convergence des séries :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

   (c) $\sum \cos(n) z^n$

2. Plus généralement, on considère la série entière $\sum a_n z^n$ et on note R son rayon de convergence. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 2 (calcul des coefficients d'un développement en série entière). [ ]

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, puis établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.
2. En notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, déterminer les coefficients de son développement en série entière.

Exercice 3 (nombre de dérangements). [ ]

On note pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, $F_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes et on définit le nombre de dérangements pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\alpha_n = F_{n,0}$.
Et on convient que $\alpha_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, $F_{n,k} = \binom{n}{k} \alpha_{n-k}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$.
2. On considère la série entière $\sum \dfrac{\alpha_n}{n!} z^n$ et on note R son rayon de convergence, S sa somme.

   (a) Etablir que $R \geq 1$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, $S(z) = \dfrac{e^{-z}}{1-z}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

   (c) Justifier alors que pour tout $n \geq 2$, $\alpha_n = E(\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2})$. *On pourra calculer* $|\alpha_n - n!/e|$.

Exercice 4 (calcul de la somme d'une série entière). **X/ENS** [ ]

Soient $x \in]-1,1[$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence, puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(na)x^n}{n}$ en fonction de a et x.
2. La série converge t-elle pour $x = 1$, $x = -1$? Préciser alors la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(na)}{n}$ pour $0 < a < \pi$.

Exercice 5 (développement en série entière en 0). [ ]

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière en 0, et calculer les coefficients de son développement.

Indications On justifie d'abord que les fonctions $x \longmapsto \arcsin(x)$ et $x \longmapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ sont DSE, et ainsi f l'est. On cherche alors une équation différentielle linéaire vérifiée par f pour obtenir les coefficients par unicité du DSE.

Exercice 6 (critère spécial des séries alternées). [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$. On note alors D l'ensemble des réels x en lesquels la série est convergente.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Etudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Etablir qu'on a convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Indications 1. A x fixé non nul, on peut calculer le rapport de D'Alembert... sans oublier, dans un second temps, d'étudier les points au bord afin d'obtenir le domaine D. 2.a) Ce sont les propriétés des séries entières, de plus on peut invoquer le théorème d'Abel radial pour assurer la continuité en un bord. 2.b) L'étude la CN est immédiate. Pour la CU, on pourra raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de double limite. 2.c) Merci qui ? le CSSA ! (ou bien... Abel radial, oui encore).

Exercice 7 (formule intégrale de Cauchy). [ ]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et de rayon de convergence $R > 0$. On note pour tout $z \in B(0, R)$, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $r \in]0, R[$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

Avec $r = R/2$, on obtient l'expression des coefficients de la série entière à partir de la somme f. Cette ***formule de Cauchy*** *nous livre d'une autre façon l'****unicité des coefficients dans le développement en série entière****.*

Indications f étant la somme d'une série entière, on reconnaît l'intégrale d'une somme de fonctions continues en θ. On prouve alors la CU sur $[-\pi, \pi]$ afin de faire l'échange des symboles $\sum / \int$ sur un segment...

Exercice 8 (calcul du rayon de convergence). [ ]

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+n)}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n existe, puis établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}(H_{2n-1} - H_{n-1})$$

   avec la convention $H_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
2. Déterminer alors un équivalent simple de a_n quand $n \to +\infty$.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. Donner son rayon de convergence.

Indications 1. A n fixé, on peut proposer un équivalent du terme général. On travaille alors à cran fini ($N \geq n$) pour justifier l'égalité attendue. 2. Cela découle du développement asymptotique de la série harmonique. 3. On a un équivalent, on est donc ramené à l'étude du rayon de convergence d'une série usuelle.