Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (calcul du rayon de convergence). [ ]

Déterminer le rayon de convergence des séries :

1. $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$
2. $\sum n^{(-1)^n} z^n$
3. $\sum \cos(n) z^n$

Exercice 2 (somme d'une série entière). [ ]

1. Montrer que, pour tout réel x, la série entière de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{2n+5}}{n!(n+2)}$ converge absolument.
2. On note $f(x)$ sa somme. Déterminer un série entière de somme $g(x)$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x^2)$$
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Exprimer alors f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3 (calcul des coefficients d'un développement en série entière). [ ]

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$
et on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, puis établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.
2. En notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, déterminer les coefficients de son développement en série entière.

Exercice 4 (intégration terme à terme à l'aide du théorème de convergence dominée). [ ]

Soit $\alpha > 0$. Etablir que :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1}$$

Exercice 5 (développement en série entière à l'aide d'une décomposition en éléments simples). **CCINP 2** [ ]

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléménts simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle ouvert de convergence qu'on précisera. Donner alors les coefficients de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et on note g sa somme sur $]-R, R[$. Exprimer pour tout entier p le coefficient a_p du développement, puis prouver-le.
   (b) Préciser alors le développement limité de f en 0.

Exercice 6 (calcul de développement en série entière). **CCINP 19** [ ]

1. (a) Justifier oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière d'une variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.

   (b) En déduire le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2. Rappeler le théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries entières, puis en déduire le développement en série entière de la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice 7 (calcul du rayon de convergence). **CCINP 21** [ ]

Soit (a_n) une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge.

1. Quel est alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

2. Caculer le rayon de convergence de la série $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}) z^n$?

Exercice 8 (régularité d'une somme). **CCINP 24** [ ]

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler le développement en série entière en 0 et le rayon de convergence de $ch(x)$.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1,\ f(x) = ch(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0,\ f(x) = \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.