Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (base des polynômes de Tchebychev). [ ]

On définit l'application :

$$\phi : (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

1. On fixe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est bien convergente.
2. Montrer que ϕ désigne un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. On rappelle que les polynômes de Tchebychev (T_n) vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

   (a) Etablir que (T_n) définit une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire considéré.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Retrouver alors la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 (distance à un sous-espace vectoriel). [ ]

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que l'application $\phi : (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \longmapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Etablir que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance $d(M, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M.
4. On note $M = \sum_{i=1}^{n} E_{i1}$. Calculer $d(M, S_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 3 (déterminant et inégalité de convexité). [ ]

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive telle que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n,\ (AX|X) \leq \|X\|^2$$

1. Justifier que $det(A) \in [0,1]$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $det(A)^t \leq det(tA + (1-t)I_n)$.

Exercice 4 (suite de polynômes orthogonaux). **X/ENS** [ ]

On considère l'espace vectoriel $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ et notons ω une fonction continue, strictement positive et intégrable sur $]-1,1[$.
On définit alors pour tout $(f,g) \in E^2$,

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\omega(t)\, dt$$

1. Etablir que $(f,g) \longmapsto < f, g >$ est bien un produit scalaire sur E.
2. Justifier qu'il existe une unique suite de polynômes (P_n) à coefficients dominants strictement positifs et tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.
4. Soit $f \in E$. Montrer que la série $\sum < f, P_n >^2$ converge et que :

$$\|f\|_2{}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} < f, P_n >^2$$

Exercice 5 (minimisation d'une intégrale). [ ]

Trouver trois réels (a,b,c) tels que :

$$\int_0^1 (\ln(t) - at^2 - bt - c)^2 \, dt \text{ soit minimale.}$$

Indications On se plonge dans l'espace préhilbertien $\mathcal{L}^2(]0,1],\mathbb{R})$ et on interprète cette intégrale comme la distance au carré de ln à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Le théorème de minimisation nous donne alors $at^2+bt+c = p_{\mathbb{R}_2[X]}(\ln)$... Reste à identifier le projeté orthogonal.

Exercice 6 (somme de matrices et orthogonalité). [ ]

Soient $p \geq 2$ et $A_1, \ldots, A_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A_1 + \ldots + A_p \text{ est inversible et } \forall\, i \neq j,\ A_i^T A_j = 0$$

Montrer que $rg(A_1) + \ldots + rg(A_p) = n$.

Indications On rappelle que $Im(A_1 + \ldots + A_p) \subset \sum_{i=1}^p Im(A_i) \subset \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Par passage aux dimensions, on obtient presque l'égalité. La dernière hypothèse nous livre l'orthogonalité des images, et ainsi la somme des images est directe.

Exercice 7 (inégalités sur le déterminant et la trace). [ ]

1. Montrer que pour tout $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $(det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} tr(S)$.
2. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$|det(A)| \leq (\frac{1}{n} tr(A^T A))^{n/2}$$

Indications 1. S est ortho-diagonalisable, on calcule facilement son déterminant et en se ramenant à une exponentielle, on peut exploiter la concavité du logarithme ou invoquer l'inégalité arithmético-géométrique. 2. C'est immédiat puisque $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (décomposition d'Iwasawa et inégalité d'Hadamard). [ ]

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (O,T) tel que :
$$M = OT$$
avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
Pour l'existence, on pourra noter u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et étudier la famille $(u(e_i))$.
2. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M. Etablir alors que :
$$|det(M)| \leq \|C_1\|_2 \ldots \|C_n\|_2$$

Indications 1. Par existence-unicité. Pour l'existence, u étant inversible, $(u(e_i))$ est une base et on introduit (e_i') l'orthonormalisée de Schmidt associée à la base $(u(e_i))$, ainsi on a $M = P_{e_i,u(e_i)} = P_{e_i,e_i'}.P_{e_i',u(e_i)}$. Reste à justifier que ces matrices de passage conviennent. L'unicité est classique et partant de deux décompositions, on montre que les matrices coïncident en étudiant les vecteurs colonnes. 2. On utilise la multiplicativité du déterminant, puis on fera intervenir Cauchy-Schwarz pour obtenir la majoration attendue.