## Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

**Exercice 1** (un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$). [ ]

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

puis établir que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

**Exercice 2** (racine carrée d'une matrice symétrique positive). [ ]

Notons $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive, c'est à dire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $X^TMX \geq 0$.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Justifier que :

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\,\lambda \in\ Sp(A),\ \lambda \geq 0$$

2. Montrer alors qu'il existe une unique matrice $R$ symétrique positive telle que $R^2 = S$. *On pourra procéder de deux façons.*

Sous ces conditions, on dit alors que $R$ désigne **la racine carrée** de $S$.

**Exercice 3** (distance à un sous-espace vectoriel). [ ]

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Etablir que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance $d(M, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction de $M$.
3. On note $M = \sum_{i=1}^n E_{i1}$. Calculer $d(M, S_n(\mathbb{R}))$.

**Exercice 4** (déterminant et inégalité de convexité). [ ]

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive telle que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n,\ (AX|X) \leq \|X\|^2$$

1. Justifier que $det(A) \in [0,1]$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $det(A)^t \leq det(tA + (1-t)I_n)$.

**Exercice 5** (cas particulier des epaces euclidiens). **CCINP 77** [ ]

Soit $E$ un espace euclidien.

1. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel $A$ de $E$, on a $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Etablir que :

$$\begin{cases} (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \\ (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \end{cases}$$

**Exercice 6** (isométries vectorielles). **CCINP 78** [ ]

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$. On note $(x|y)$ le produit scalaire de $x$ et $y$, $\|.\|$la norme euclidienne associée.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Démontrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que $u$ est bijectif.
2. Etablir que $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de $E$ est un groupe pour le produit de composition.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Prouver que : $u \in O(E)$ si et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est encore une base orthonormée de $E$.

**Exercice 7** (projeté orthogonal). **CCINP 80** [ ]

Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $E$.
2. On pose $F = Vect(x \longmapsto \cos(x), x \longmapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur $F$ de la fonction $u : x \longmapsto \sin^2(x)$.

**Exercice 8** (une application de la réduction aux systèmes différentiels). **CCINP 74** [ ]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier sans calcul que $A$ est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $A$, puis une base de vecteurs propres associés.
2. Résoudre alors le système différentiel donné par : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2z(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = 2x(t) + z(t) \end{cases}$.