Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (résolution d'une équation fonctionnelle). [ ]

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$
2. Montrer que f est continue, intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Exercice 2 (étude de la fonction Γ). [ ]

On appelle **fonction gamma** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

1. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etablir que Γ est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et préciser l'expression de sa dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer qu'il existe un unique $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Gamma(x+1)$, puis en déduire un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x \to 0, x > 0$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$, puis en déduire la limite de $\Gamma(x)$ quand $x \to +\infty$.
6. Justifier que Γ est convexe, puis construire sa courbe représentative sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 (calcul de l'intégrale de Dirichlet). [ ]

Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. En déduire la valeur de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$
On pourra introduire pour tout $x \geq 0$, $\phi(x) = \int_0^x h(t)\, dt$ où $h : t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ qu'on prolonge par continuté sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 (développement en série entière d'une transformée de Laplace bilatérale). **X/ENS** [ ]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue et non nulle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $t \longmapsto f(t)e^{xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose :
$$L(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{xt}\, dt$$

1. Montrer que L est développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.
2. Etablir alors que L est log-convexe, c'est à dire que $\ln \circ L$ est convexe.

Exercice 5 (échange des symboles $\sum$ et $\int$). [ ]

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-n}$ est convergente.
2. Montrer que $t \longmapsto t^{-t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, et en déduire l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\, dt$$

Indications 1. On peut faire une comparaison à une série de Riemann convergente pour $n \geq 2$. 2. Le prolongement par continuité est immédiat en se ramenant sous forme exponentielle. De plus, on utilise le DSE de l'exponentielle avant d'échanger les symboles par un des théorèmes d'échange, par exemple le TCD appliqué à (S_n).

Exercice 6 (développement asymptotique d'une somme de séries de fonctions). [ ]

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et uniformément sur $[1,+\infty[$. On note S la somme de la série.
2. Justifier que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. On pose $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Etablir que $S(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

Indications 1. Avec $x \geq 0$ fixé, on vérifie les hypothèses du CSSA. La convergence uniforme s'obtient alors par majoration uniforme du reste partiel sur $[1,+\infty[$. 2. Cela résulte du théorème de double limite. 3. On travaille sur la différence $|S(x) - a/\sqrt{x}|$ et on pourra invoquer le théorème des accroissements finis avec une fonction bien choisie sur $[0,1]$, afin d'obtenir une majoration en $O(1/x\sqrt{x})$.

Exercice 7 (dérivabilité de la somme d'une série de fonctions). [ ]

On pose sous réserve d'existence $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etablir que f n'est pas dérivable en 0.

Indications 1. A x fixé, on étudie le terme général pour montrer que $D_f = \mathbb{R}_+$. 2. On applique le critère C^1 pour les séries de fonctions, et on veillera à travailler sur un compact pour faciliter les dominations. 3. Par l'absurde, on exploite le taux d'accroissement pour dominer une série divergente.

Exercice 8 (calcul de l'intégrale de Gauss). [ ]

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$$

1. Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, puis justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) + f^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.
3. Retrouver alors la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Indications 1. f désigne l'unique primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour g, on revient au critère C^1 pour les intégrales à paramètre. On montre alors que $x \longmapsto g(x) + f^2(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$. 2. On passe à la limite quand $x \to +\infty$. 3. Partant de $\Gamma(1/2)$, on se ramène par changement de variable à l'intégrale de Gauss.