Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (étude de la fonction ζ). [ ]

On considère la fonction ζ définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\zeta(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}$$

et pour tout $k\geq 1$, on note $f_k : x\longmapsto 1/k^x$.

1. Montrer que ζ est continue sur $]1,+\infty[$, puis préciser ses variations sur $]1,+\infty[$.
2. (a) Soit $a>1$. Etablir que $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. En déduire que : $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.
   (b) La série converge t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?
3. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $x>1$, $\dfrac{1}{x-1}\leq\zeta(x)\leq\dfrac{1}{x-1}+1$.
4. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x\to 1$, puis construire sa courbe représentative sur $]1,+\infty[$.
5. Etudier alors la convexité de ζ sur $]1,+\infty[$.

Exercice 2 (comportement asymptotique de la somme). [ ]

On définit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et uniformément sur $[1,+\infty[$. On note S la somme de la série.
2. Justifier que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
3. On pose $a=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Etablir que :

$$S(x)=\frac{a}{\sqrt{x}}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

Exercice 3 (calcul de l'intégrale de Gauss). [ ]

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt \text{ et } g(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

1. Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, puis justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $g(x)+f^2(x)=\dfrac{\pi}{4}$;
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.
3. Retrouver alors la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Exercice 4 (étude de la fonction Γ). [ ]

On appelle **fonction gamma** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etablir que Γ est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et préciser l'expression de sa dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer qu'il existe un unique $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Gamma(x+1)$, puis en déduire un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x \to 0, x > 0$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$, puis en déduire la limite de $\Gamma(x)$ quand $x \to +\infty$.
6. Justifier que Γ est convexe, puis construire sa courbe représentative sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 (autour de la convergence uniforme). **CCINP 11** [ ]

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et notons (f_n) une suite de fonctions définies sur X et à valeurs réelles et telles que $f_n \xrightarrow{CS} f$. On suppose qu'il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\longrightarrow 0$.
   Démontrer que la suite (f_n) ne peut pas converger uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Etudier alors la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$ $(a > 0)$, puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 (dérivabilité de la somme d'une série de fonctions). **CCINP 16** [ ]

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$$

On pose, sous réserve d'existence, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$.

1. Etablir que S est bien définie sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer alors $S'(1)$.

Exercice 7 (intégration terme à terme pour une série de fonctions définies sur un intervalle). **CCINP 49** [ ]

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes et on pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On admet alors que sa somme f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la foncction $g_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt$.
   (b) Montrer alors que :
   $$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 8 (équivalent d'une intégrale à paramètre). **CCINP 50** [ ]

On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\, dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $xF(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$ et préciser sa valeur.
3. En déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.