Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (lemme de Borel-Cantelli et loi du 0-1). [ ]

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite d'évèements $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que :
$$P(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p) = 0$$
2. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ diverge et que les évènements (A_n) sont mutuellement indépendants. Montrer que :
$$P(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p) = 1$$
On pourra étudier $P(\cap_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p})$ et utiliser l'inégalité de convexité $1 - x \leq e^{-x}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 (étude du nombre de succès après un premier succès). [ ]

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$: $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
Un individu joue avec une pièce non nécessairement équilibré : la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N le nombre de lancers nécessaires. Si pile apparait au n-ième lancer, il lance à nouveau cette pièce n fois et on note X le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers.

1. Préciser la loi de N ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $(N = n)$.
2. Déterminer la loi du couple (N, X).
3. Démontrer que :
$$P(X = 0) = \frac{q}{1+q} \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$
4. Montrer alors que X a la même loi que le produit de deux variables indépendantes $Y \hookrightarrow B(1/1+q)$ et $Z \hookrightarrow G(1/1+q)$.
5. En déduire $E(X)$.

Exercice 3 (formules de Wald pour une somme aléatoire). [ ]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles et qui suivent toutes la même loi et considérons N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose de plus que N et les variables X_n sont mutuellement indépendantes. Enfin, on pose :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ avec la convention } S_0 = 0$$

1. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la loi de S_N.
2. On suppose que les variables aléatoires X_n sont aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Etablir que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[0, 1]$.
   (b) Montrer que si $X_1, N \in L^1$, alors S_N est d'espérance finie et elle vérifie la **première formule de Wald** :
   $$E(S_N) = E(X_1)E(N)$$
   (c) Montrer que si $X_1, N \in L^2$, alors S_N possède un moment d'ordre 2 et elle vérifie la **seconde formule de Wald** :
   $$v(S_N) = V(X_1)E(N) + E(X_1)^2 V(N)$$

Exercice 4 (puissances d'une matrice strictement stochastique). **X/ENS** [ ]

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique, c'est à dire vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} > 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

On note $\epsilon = \min_{i,j} a_{ij} > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\alpha_j^{(k)} = \min_i a_{ij}^{(k)},\ \beta_j^{(k)} = \max_i a_{ij}^{(k)} \text{ et } \delta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est strictement stochastique.
2. Etablir alors que :
$$\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)} \text{ et } \delta_j^{(k+1)} \leq (1-2\epsilon)\delta_j^{(k)}$$
3. En déduire que la suite (A^k) converge vers une matrice M strictement stochastique de rang 1, puis justifier qu'il s'agit d'une matrice de projection.

Exercice 5 (un peu d'arithmétique avec la fonction ζ). [ ]

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on rappelle que pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
On considère alors X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n =$ "n divise X". Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ désigne une famille d'évènements mutuellement indépendants.
3. En déduire que :
$$\prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^s}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Indications 1. On vérifie que les poids des évènements élémentaires sont psitifs et de poids total égal à 1. 2. On se ramène à une sous-famille finie d'évènements et on montre, par un argument arithmétique, que $P(\cap_{i=1}^n A_{p_i}) = \prod_{i=1}^n P(A_{p_i})$. 3. Le membre de gauche désigne un produit de probabilités d'évènements mutuellement indépendants.

Exercice 6 (lois usuelles et conditionnement). [ ]

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que ces appels consituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus à l'issue de ces n appels.

1. Préciser la loi de X.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ corrspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P_{(X=i)}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. *On pourra utiliser l'égalité sur les coefficients binomiaux :* $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Donner alors l'espérance et la variance de Z.

Indications 1. On compte le nombre de succès dans une succession finie d'appels indépendants. 2.a) Connaissant le nombre de correspondants obtenus, on réitère l'opération pour dénombrer le nombre de succès à nouveau... la loi conditionnelle sera donc une loi binomiale. 2;b) Il suffit de calculer $P(Z = k) = P(X+Y = k)$ et de conditionner par rapport aux évènements $(X = i)$. 2.c) Cela découle des propriétés d'une loi binomiale.

Exercice 7 (théorème de Stone-Weiertrass). [ ]

Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme défini par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On fixe $x \in]0,1[$. On considère une suite de variables aléatoires (X_n) mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre x, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Donner une expression de $E(f(\frac{S_n}{n}))$.
2. Pour tout $\alpha > 0$, on définit $\delta(\alpha) = sup\{|f(x) - f(y)|,\ x, y \in [0,1], |x-y| \leq \alpha\}$. Démontrer que :

$$\underset{x\in[0,1]}{sup} |P_n(x) - f(x)| \leq \delta(\alpha) + \frac{2||f||_\infty}{n\alpha^2}$$

3. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Indications 1. S_n prend un nombre fini de valeurs, on peut appliquer le théorème de transfert. 2. On a : $|P_n(x) - f(x))| \leq E(|f(S_n/n) - f(x)|)$, puis on décrit cette somme avant de séparer les indices $I = \{k,\ |k/n - x| \leq \alpha\}$ et $\overline{I}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous permettra d'obtenir une majoration plus fine sur $\overline{I}$. 3. f étant uniformément continue sur $[0,1]$ par Heine, on justifie qu'on peut ainsi se remener à la définition de la convergence uniforme : $\|P_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

Exercice 8 (convergence en moyenne et convergence en probabilités). [ ]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que :

- (X_n) converge en probabilité vers une variable X si pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- (X_n) converge en moyenne vers une variable X si $E(|X_n - X|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer que la convergence en moyenne entraîne la convergence en probabilité de la suite (X_n).
2. On considère alors (Z_n) une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On pose : $\forall\, n \geq 1,\ Y_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k$.
   (a) Calculer pour tout $n \geq 1$, $P(Y_n \neq 0)$.
   (b) En déduire que (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
   (c) Calculer pour tout $n \geq 1$, $E(Y_n)$.
   (d) La suite (Y_n) converge t-elle en moyenne vers la variable certaine égale à 0 ?

Indications 1. Il suffit d'invoquer l'inégalité de Markov. 2.a) Ici, $(Y_n \neq 0) = \cap_{k=1}^{n}(Z_k \neq 0)$... et on utilise l'indépendance pour calculer la probabilité associée. 2.b) A $\epsilon > 0$ fixé, on a : $(|Y_n - 0| \geq \epsilon) = (Y_n \geq \epsilon) \subset (Y_n \neq 0)$ et on utilise la croissance de P. 2.c) Encore une fois, les variables Z_k étant mutuellement indépendantes, on retrouve l'espérance du produit de lois connues. 2.d) On fait tendre n vers $+\infty$ et ainsi, la convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence en moyenne.