Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (loi du minimum). [ ]

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$ et fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Préciser alors la loi de Y.

Exercice 2 (étude d'une chaîne de Markov). [ ]

Une municipalité souhaite proposer un service de véhicules en libre service. Lors d'une première expérience, on installe quelques véhicules en 3 lieux stratégiques de la ville : les places A, B et C. Avec ces véhicules, on peut effectuer un trajet vers l'une des deux autres places et après quelques mois, on observe les résultats suivants :

- si un véhicule est en A, il se déplace vers B avec une probabilité $3/4$ et vers C avec une probabilité $1/4$;
- si un véhicule est en B, il se déplace vers A avec une probabilité $3/4$ et vers C avec une probabilité $1/4$;
- si un véhicule est en C, il se déplace vers B avec une probabilité $3/4$ et vers A avec une probabilité $1/4$.

On s'intéresse alors au déplacement d'un véhicule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n, B_n ou C_n les évènements "à l'instant n, le véhicule est en place A, B ou C", et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n)$$

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2. Justifier que les valeurs propres de M sont toutes réelles, puis établir que M admet trois valeurs propres distinctes telles que $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = 1$.
3. Montrer qu'il existe un unique vecteur $U_0 \in E_M(1)$ tel que la somme de ses composantes soit égale à 1.
4. On considère alors une base de vecteurs propres $B = (U_0, U_1, U_2)$ associée aux valeurs propres $1, \lambda_1, \lambda_2$ et on peut écrire $X_0 = \alpha_0 U_0 + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$ dans cette base. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \alpha_0 U_0 + \alpha_1 \lambda_1^n U_1 + \alpha_2 \lambda_2^n U_2$, puis justifier que nécessairement $\alpha_0 = 1$.
5. En déduire que les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

Exercice 3 (loi d'une somme et loi conditionnelle). [ ]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'on suppose indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. *On pourra procéder de deux façons.*
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soient $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. On note Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose de plus que X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

Exercice 4 (loi conjointe et lois marginales). [ ]

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple est donné par :

$$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 5 (un exemple de tirage sans remise). **CCINP 109** [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées $B_1,\dots,B_n$ et deux boules noires numérotées N_1, N_2. On effectue le tirage une à une et sans remise de toutes les boules de l'urne.
On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 6 (existence de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète). **CCINP 100** [ ]

Soit $\lambda > 0$ et considérons X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$, puis déterminer la valeur de λ.
2. Prouver que X possède une espérance, puis la calculer. La variable X admet-elle une variance ?

Exercice 7 (loi du max et loi du min). **CCINP 106** [ ]

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ qu'on suppose indépendantes. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = P(Y=k) = pq^k \text{ avec } p \in]0,1[\text{ et } q = 1-p$$

On considère alors les variables $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. En déduire la loi marginale de U.

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.

3. Prouver que la variable $W = V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 (fonction génératrice). **CCINP 110** [ ]

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ et on note R_X son rayon de convergence.
   (a) Prouver que $R_X \geq 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X. Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$, puis pour tout $t \in [-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous la forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en le justifiant, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer D_{G_X} et pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2. Déterminer en utilisant les questions précédentes la loi de $X+Y$.