Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (recherche du polynôme caractéristique). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. En notant J la matrice constituée que de 1, calculer J^2.
2. Justifier de deux façons que A est diagonalisable, et déterminer son spectre.
3. Préciser alors son polynôme caractéristique.

Exercice 2 (résolution d'une équation matricielle). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^5 = M^2 \;\text{ et }\; tr(M) = n$$

Exercice 3 (diagonalisabilité d'une matrice par blocs). [ ]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On considère de plus :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

1. On suppose que $B = 0$ et que A est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
2. En utilisant une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité, établir que la réciproque est encore vraie.

Exercice 4 (rayon spectral). **X/ENS** [ ]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le rayon spectral par $\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $\rho(M) < 1$

(ii) la suite (M^k) converge vers 0

(iii) la série $\sum M^k$ est convergente

Exercice 5 (matrices de spectres disjoints). [ ]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeur propre commune.

1. En notant $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A, montrer que $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que $AX = XB \Leftrightarrow X = \{0\}$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Indications 1. A est trigonalisable, et ainsi $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$. On peut alors évaluer en B et utiliser la multiplicativité du déterminant pour justifier que celui-ci est non nul. 2. Seul le sens direct est délicat. En fait, cette égalité nous permet d'obtenir par récurrence, $A^k X = XB^k$ et donc, $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$... on conclut grâce à Cayley-Hamilton. 3. Cela revient à justifier que $X \longmapsto AX - XB$ est un isomorphisme.

Exercice 6 (caractérisation des matrices nilpotentes à l'aide de la trace). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ tr(A^k) = 0$$

On pourra essayer de proposer deux méthodes.

Indications Encore une fois, seul le sens réciproque est délicat. Méthode 1 : on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour l'hérédité, on justifiera que 0 est valeur propre à partir de l'égalité $\chi_A(A) = 0$. Méthode 2 : on note $\lambda_0 = 0$ et on introduit les multiplicités des autres valeurs propres distinctes éventuelles. On est alors ramené à un système associé à une matrice de Vandermonde de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ qu'on résout.

Exercice 7 (limite des puissances d'une matrice diagonalisable). [ ]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la suite (A_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{n} \\ \dfrac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la limite de la suite (A_n^n) quand $n \to +\infty$.

Indications On diagonalise A_n... et on peut constater qu'on trouve une matrice de passage indépendante de n de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n^n = PD_n^nP^{-1}$. Reste à identifier la limite de $(1 \pm i\lambda/n)^n$ en voyant $1 \pm i\lambda/n = \rho_n e^{i\theta_n}$.

Exercice 8 (matrices de rang 1). [ ]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $rg(A) = 1 \Leftrightarrow$ il existe des matrices colonnes non nulles telles que $A = X.Y^T$.
2. On suppose que $rg(A) = 1$. Etablir que A est semblable à la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & \dots & 0 & tr(A) \end{pmatrix}$$
3. En déduire que $A^2 = tr(A).A$, puis calculer :
$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k/k!$$
On pourra discuter suivant les valeurs de $tr(A)$.

Indications 1. Le sens réciproque est immédiat. Pour le sens direct, il suffit par exemple de voir les colonnes $C_i = \lambda_i.X$ où X désigne un vecteur colonne non nul quelconque car $rg(A) = 1$. 2. En fait, on trigonalise en remarquant que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité $m_0 \geq n - 1$. 3. On calcule A^2 en utilisant la matrice précédente, et on en déduit que pour tout $k \geq 1$, $A^k = tr(A)^{k-1}A$...