Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (recherche du polynôme caractéristique). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. En notant J la matrice constituée que de 1, calculer J^2.
2. Justifier de deux façons que A est diagonalisable, et déterminer son spectre.
3. Préciser alors son polynôme caractéristique.

Exercice 2 (utilisation d'un polynôme annulateur). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$6A^T A = 5A - I_n$$

Montrer alors que $A^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3 (matrices de rang 1). [ ]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $rg(A) = 1 \Leftrightarrow$ il existe des matrices colonnes non nulles telles que $A = X.Y^T$.
2. On suppose que $rg(A) = 1$. Etablir que A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & \dots & 0 & tr(A) \end{pmatrix}$$

3. En déduire que $A^2 = tr(A).A$, puis calculer :

$$\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k/k!$$

On pourra discuter suivant les valeurs de $tr(A)$.

Exercice 4 (matrices de spectres disjoints). [ ]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeur propre commune.

1. En notant $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A, montrer que $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que $AX = XB \Leftrightarrow X = \{0\}$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 5 (polynôme minimal et application au calcul des puissances d'une matrice). **CCINP 91** [ ]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre qu'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer en le justifiant le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$, puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (commutant d'une matrice). **CCINP 73** [ ]

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer alors le commutant de A, noté $C(A)$, l'ensemble des matrices qui commutent avec A, puis justifier que :

$$C(A) = Vect(I_2, A)$$

Exercice 7 (diagonalisabilité d'une matrice). **CCINP 67** [ ]

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 8 (étude d'un endomorphisme sur un espace de matrices). **CCINP 88** [ ]

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Montrer que $P(u) = 0 \Rightarrow$ toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \geq 2$ et posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On défnit alors la matrice $A = (a_{ij})$ par $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$, et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = M + tr(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? On pourra procéder de deux façons.