Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (phénomène de Gibbs). ▶ **Centrale 2** [ ]

Soit $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

1. Etudier la convergence simple, puis la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant le langage Python, représenter le comportement asymptotique de la suite des sommes partielles (S_n), puis conjecturer la limite simple de la série $\sum f_n$.
3. On note encore $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le plus petit réel $x_n \geq 0$ tel que S_n présente un extremum local en x_n.
4. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n(x_n)$, puis justifier qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonctions.

Exercice 2 (étude des matrices de trace nulle). [ ]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f désigne une homothétie, c'est à dire :
$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\ f(x) = \lambda.x$$
2. Montrer alors que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de coefficients diagonaux tous nuls.
3. Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $tr(A) = 0$
   (ii) $\exists\, (U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ A = UV - VU$

   On pourra introduire $\phi : M \longmapsto MD - DM$ *avec* $D = diag(1, \ldots, n)$.

Questions du jury

- Etablir que $Ker(tr)$ est un hyperplan dont on donnera une base.
- Rappeler le théorème du rang et faire la démonstration de ce théorème.

Exercice 3 (une autre définition de la fonction Γ). [ ]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère alors la suite de fonction (f_n) définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(t) = \begin{cases} (1 - \frac{t}{n})^n t^{\lambda - 1} & \text{, si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$.

Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et établir que :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda n!}{\lambda(\lambda + 1) \ldots (\lambda + n)}$$

Questions du jury

- Redonner la définition de la fonction Γ et établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}/2$, puis déterminer la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Exercice 4 (étude d'un système dynamique discret défini sur un compact). **X/ENS** [ ]

1. On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose bornée, et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). Justifier que $\mathcal{A}$ est non vide, puis établir que $\mathcal{A} = \cap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$.
2. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ qu'on suppose continue et considérons $(u_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que :
$$(u_n) \text{ converge si et seulement si } u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0.$$

Exercice 5 (notion de vecteurs tangents à une partie). **X/ENS** [ ]

Si X est une partie d'un espace vectoriel E de dimension finie et $x \in X$, $v \in E$, alors on dit que v est tangent à X en x s'il existe $\alpha > 0$ et un arc $\gamma :]-\alpha, \alpha[\longrightarrow X$ tel que γ est dérivable en 0 avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

1. Soit $\epsilon > 0$ et posons $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ une application qu'on suppose dérivable en 0 et vérifiant $\gamma(0) = I_n$. Montrer que nécessairement $\gamma'(0) \in A_n(\mathbb{R})$.
2. Etablir que l'ensemble des vecteurs tangents à $SO_n(\mathbb{R})$ en I_n est l'ensemble des matrices antisymétriques $A_n(\mathbb{R})$.

Indications 1. On écrit le développement limité de γ en 0 de sorte que $\gamma(x) = I_n + x\gamma'(0) + o(x)$. Or $\gamma(x)^T\gamma(x) = I_n$: on invoque alors l'unicité de la partie régulière pour identifier les coefficients du DL. 2. La question précédente nous donne l'inclusion directe. Réciproquement, si $A \in A_n(\mathbb{R})$, alors on cherche à construire un chemin γ qui conviendrait... on pourra se souvenir que $\phi : t \longmapsto \exp(tA)$ est une fonction très pratique, à condition de vérifier qu'elle satisfait bien toutes les conditions d'un tel arc.

Exercice 6 (algorithme de Héron). [ ]

Soit $A \in S_p(\mathbb{R})$.

1. Etablir que : $A \in S_p^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in\ Sp(A),\ \lambda > 0$.
2. On suppose désormais que $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice R symétrique positive telle que :
$$\begin{cases} R^2 = A \\ R \text{ désigne un polynôme en A} \end{cases}$$
3. On définit la suite (R_n) par $R_0 = I_p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = \dfrac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$.
   (a) Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^T$ avec $Sp(D) \subset \mathbb{R}_+^*$. Montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = P\Delta_n P^{-1}$, où Δ_n désigne une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.
   (b) En déduire que la suite (R_n) converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vers l'unique racine carrée de A.

Indications 1. Par double implication. Pour le sens direct, avec $\lambda \in Sp(A)$, on introduit un vecteur propre associé de sorte que $X_0^TAX_0 > 0 = \lambda\|X_0\|_2 > 0$. Pour le sens réciproque, on peut travailler de deux façons : on écrit la relation d'orthodiagonalisation, ou on introduit simplement une BON de vecteurs propres. 2. Soit on travaille par existence-unicité directement sur les matrices, soit on peut procéder par analyse-synthèse sur les endomorphismes canoniquement associés. 3.a) C'est immédiat par opérations sur les matrices diagonales. 3.b) On exploite la relation de récurrence donnée par la question précédente, et on étudie les système dynamiques associés à chacun des coefficients diagonaux.

Exercice 7 (méthode de variations des constantes). [ ]

Trouver les solutions de l'équation différentielle :
$$(E) \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-t^2}}$$

Indications On a une EDL2 résolue sur l'intervalle $]-1, 1[$ et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on connait la forme des solutions. De plus, étant à coefficients constants, on identifie rapidement S_0. Reste à déterminer une solution particulière par la méthode de variations des constantes : on n'hésitera pas à réinvestir les formules de Cramer pour la résolution.

Exercice 8 (convergence en moyenne des puissances d'une matrice orthogonale). [ ]

1. On rappelle que $\mathcal{O}_p(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R}),\ M^T = M^{-1}\}$.
   (a) Retrouver rapidement la forme des matrices qui constituent $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer plus généralement que $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$, puis justifier qu'il s'agit d'une partie compacte de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k$$
   (a) Justifier que $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R}) = Ker(M - I_p) \overset{\perp}{\oplus} Im(M - I_p)$.
   (b) En déduire que (A_n) converge vers la matrice de la projection orthogonale sur $Ker(M - I_p)$.

Indications 1.a) On a $M^TM = I_2$ et on revient aux coefficients. 1.b) On utilise la caractérisation des sous-groupes de $(\mathcal{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$. De plus, en dimension finie, on peut montrer que $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ est fermé et borné. 2.a) On invoque la caractérisation d'une telle décomposition en dimension finie : les sous-espaces étant orthogonaux, l'intersection est réduite à 0 et la formule du rang nous permet de conclure. 2.b) Soit $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$, on utilise la décomposition de sorte que $A_nX = A_nX_1 + A_nX_2$, puis on étudie le comportement asymptotique de chacun des termes afin de montrer que $A_nX \longrightarrow X_1$.