Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (fonction indicatrice d'Euler). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On choisit au hasard un nombre entier compris entre 1 et n. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note A_p = "l'entier choisi est divisible par p".

1. Calculer $P(A_p)$. Qu'obtient-on si p est un diviseur de n ?
2. On note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers distincts de n. Montrer que les évènements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On définit alors ϕ la **fonction indicatrice d'Euler** sur $\mathbb{N}^*$ par $\phi(n) = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}$. Déduire des questions précédentes que :

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Questions du jury

- On note encore ϕ la fonction indicatrice d'Euler. Etablir que pour tout nombre premier p, $\phi(p^\alpha) = p^\alpha(1 - 1/p)$.
- Rappeler le théorème des restes chinois. Expliquer alors comment on peut retrouver l'expression de $\phi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (intégrale à paramètre et somme d'une série de fonctions). [ ]

Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que f est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer finalement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Questions du jury

- Citer le théorème de convergence des séries de Riemann : en donner une preuve rapide, puis retrouver un équivalent simple du reste partiel d'une telle série convergente.
- Retrouver le développement en série entière en 0 des fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \arctan(x)$ et $x \longmapsto \arccos(x)$.

Exercice 3 (algorithme de Héron). [ ]

Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. On définit la suite (R_n) par $R_0 = I_p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$$

1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^T$ avec $Sp(D) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = P\Delta_n P^{-1}$, où Δ_n désigne une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.
3. En déduire que la suite (R_n) converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vers une matrice $R \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

Questions du jury

- Rappeler l'inégalité arithmetico-géométrique, puis justifier que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $det(S)^{1/n} \leq tr(S)/n$.
- Prouver que pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 (inégalité de Cauchy-Schwarz). **CCINP 76** [ ]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ la norme euclidienne associée.

1. (a) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Etudier le cas d'égalité.
2. On note maintenant $E = \{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble :
$$\{\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f},\ f \in E\}$$
possède une borne inférieure et déterminer la valeur de m.

Exercice 5 (deux études d'intégrabilité). **CCINP 28** [ ]

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 6 (applications linéaires continues). **CCINP 36** [ ]

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. On note $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ des normes associées à chacun de ces espaces.

1. Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) f est continue sur E
   (ii) f est continue en 0_E
   (iii) $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$
2. On munit l'espace $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie et on définit $\phi : f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$. Démontrer que ϕ désigne une forme linéaire continue sur E.

Exercice 7 (modes de convergence). **CCINP 15** [ ]

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale, puis celle de la convergence uniforme sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre O et de rayon $R > 0$?

Exercice 8 (somme d'une série entière). [ ]

On considère la fonction f définie par :
$$f : x \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$$

1. Préciser le domaine de définition de f. On n'oubliera pas d'étudier la convergence aux bornes.
2. Expliciter $f(x)$ en fonction de x sur $]-1,1[$.

Indications 1. Par D'Alembert, on prouve rapidement que $R = 1$, puis on montre que $\sum f_n(x)$ converge absolument sur $[-1,1]$. 2. A cran fini et pour x fixé, on développe $f_n(x)$ en éléments simples afin de faire apparaître des DSE usuels.