Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (irrationalité de l'exponentielle d'un rationnel). ▶ **Centrale 2** [ ]

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, non nuls. On pose $P_n = \dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont des entiers relatifs.
2. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x)\,dx$.
   (a) Dans le langage Python, construire le programme $I(n : int, a : int, b : int) \longrightarrow float$ qui, pour tout entier n donné et pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, renvoie une valeur approchée de I_n.
   (b) Quelle hypothèse pouvez-vous faire quant à son comportement asymptotique quand $n \to +\infty$? Démontrer cette hypothèse.
3. On suppose que $e^{a/b}$ est un rationnel de dénominateur d. Montrer que la suite (dI_n) est stationnaire.
4. Quels sont alors les nombres $r \in \mathbb{Q}$ tels que $e^r \in \mathbb{Q}$?

Exercice 2 (étude des transformées d'une série à termes strictement positifs). [ ]

On considère $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note encore $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et fixons $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire de la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$?
2. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Etablir alors que :

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Questions du jury

- A l'aide de cet exercice, retrouver la nature des séries de Riemann.
- Rappeler le théorème de sommation des équivalents. En utilisant ce résultat, retrouver le théorème de convergence des sommes de Césaro.

Exercice 3 (intégrale à paramètre et somme d'une série de fonctions). [ ]

Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que f est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer finalement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$.

Questions du jury

- Etablir que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est semi-convergente.
- Rappeler le théorème de convergence des séries de Riemann : en donner une preuve rapide, puis retrouver un équivalent simple du reste partiel d'une telle série convergente.

Exercice 4 (deux théorèmes taubériens). **X/ENS** [ ]

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1.

1. On suppose que $\begin{cases} f(x) \text{ tend vers une limte finie } \ell \text{ quand } x \to 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0 \end{cases}$. Montrer que la série $\sum a_n$ converge de limite ℓ.
2. On suppose que $\begin{cases} f(x) \text{ tend vers une limte finie } \ell \text{ quand } x \to 1 \\ a_n = o(1/n) \end{cases}$. Montrer que la série $\sum a_n$ converge de limite ℓ.

Exercice 5 (dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et formes linéaires centrales). **X/ENS** [ ]

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note f_A la forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :
$$f_A : X \longmapsto tr(AX)$$
Montrer que l'application $\phi : A \longmapsto f_A$ établit un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(XY) = f(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda.tr$.

Indications 1. On vérifie d'abord que $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$, puis on revient à la caractérisation des isomorphismes en dimnension finie. 2. On peut procéder de plusieurs façons. Par exemple, on peut retrouver $Ker(tr)$, puis montrer qu'il peut être vu de la façon suivante : $Ker(tr) = Vect((AB - BA), A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, ainsi on pourra avoir $Ker(tr) = Ker(f) \Rightarrow f = \lambda.tr$. Plus cohérent, on exploite l'isomorphisme obtenu à la question 1 de sorte que $f = f_A$. Comme $f_A(XY) = f_A(YX)$, alors pour tout X, on a $AX = XA$ et ainsi, $A = \lambda.I_n \Rightarrow f = \lambda.tr$.

Exercice 6 (majoration à l'aide de la fonction génératrice). [ ]
Soit X une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et on note G_X sa fonction génératrice. Montrer que pour tout $r \in]0, 1[$,
$$P(X \geq n) \leq \frac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$$
et étudier le cas d'égalité.

Indications On a $1 - G_X(r) = G_X(1) - G_X(r)$ et on minore cela par le reste partiel d'une série convergente. Comme pour tout $k \geq n$, $r^k \leq r^n$, on peut affiner la minoration et reconnaître $P(X \geq n)$.

Exercice 7 (exponentielle du produit vectoriel). [ ]
Soit $a \in \mathbb{R}^3$ non nul, et on considère l'application :
$$f : x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto a \wedge x$$
1. Montrer qu'il existe une base ortonormée directe B' dans laquelle la matrice de f s'écrit :
$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}$$
2. En déduire la nature de $\exp(f)$.

Indications 1. Si $a = 0$, alors f est nul et c'est immédiat. Sinon, on pose $e_1 = a/\|a\|$ et on introduit $e_2, e_3 \in e_1^{\perp}$ de sorte que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On vérifie alors que la matrice a la forme souhaitée. 2. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & -\|a\| \\ \|a\| & 0 \end{pmatrix}$ et on calcule par blocs l'exponentielle de la matrice précédente en soignant le calcul de $\exp(N)$: on pourra observer que $N^2 = -\|a\|^2.I_2$ et établir ainsi que $\exp(M) \in SO_3(\mathbb{R})$. C'est donc une rotation dont on précisera l'angle et l'axe de rotation.

Exercice 8 (différentiabilité du déterminant). [ ]
On se place dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et on considère l'application $det : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par :
$$det : M \longmapsto det(M)$$
1. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Justifier que pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $det(M) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+j} \Delta_{kj} m_{kj}$, où Δ_{kj} est le mineur associé.
2. Déterminer $D_{i,j}det(M)$ la dérivée partielle d'indice (i, j) du déterminant au point M, c'est à dire la dérivée en M suivant la matrice élémentaire E_{ij}.
3. Montrer alors que l'application det est différentiable sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que pour tout $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,
$$d\,det_M(H) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} H_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = tr(C(M)^T H)$$

Indications 1. On reconnaît ici la formule de développement du déterminant suivant C_j. 2. On dérive l'expression précédente en suivant la direction E_{ij}. 3. On peut justifier la différentiabilité car le déterminant est polynomial en les coefficients de M, puis on revient à l'expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.