Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (ordre d'une matrice inversible). ▶ **Centrale 2** [ ]

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices inversibles et pour lesquelles M et M^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On rappelle que M est d'ordre fini s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$M^\alpha = I_n$$

1. Soit M une matrice carrée d'ordre n qu'on suppose à coefficients entiers. Montrer que $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow det(M) = \pm 1$.
2. (a) Dans le langage Python, construire un programme $matalea(n : int) \longrightarrow array$ qui, pour tout entier n non nul, renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Construire la fonction $ordre(M : array, N : int) \longrightarrow int$ qui, pour toute matrice M et tout entier N non nul, teste si la matrice M est d'ordre fini $\alpha \in [\![1, N]\!]$, puis renvoie son ordre éventuel. Le programme renverra 0 par défaut si elle n'est pas d'ordre fini sur l'intervalle de travail.
3. Montrer que si M est d'ordre fini, alors M est nécessairement diagonalisable.
4. Dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z})$, on considère M telle que $det(M) = -1$. Justifier alors que M est d'ordre fini si et seulement si $M^2 = I_2$.
5. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ est-il un groupe multiplicatif ?

Exercice 2 (transformée de Fourier de la loi normale). [ ]

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $t \longmapsto tf(t)$ et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. A l'aide du théorème fondamental de l'analyse, établir que $f(x)$ possède nécessairement une limite nulle quand $x \to \pm\infty$.
2. On appelle alors **transformée de Fourier** de f l'intégrale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$\mathcal{F}_f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\, dt$$
   (a) Vérifier que cette intégrale est bien convergente.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}_f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.
3. On considère la fonction $g : t \longmapsto e^{-t^2/2}$ et on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \sqrt{2\pi}$.
   Justifier que g satisfait les hypothèses précédentes et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_g(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$.

Questions du jury

- Rappeler la structure des solutions d'une équation différentielle linéaire et préciser $dim(S_0)$.
- Montrer que : $\int_I |f|$ converge $\Rightarrow \int_I f$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 (diagonalisabilité équivalente de A et A^2 pour une matrice inversible). [ ]

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.

Questions du jury

- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A annule un polynôme scindé à racines simples.
- Rappeler le théorème de décomposition de Dunford. Comment peut-on alors utiliser ce résultat pour démontrer l'équivalence précédente?

Exercice 4 (adjoint d'un endomorphisme). **X/ENS** [ ]

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $< A, B >= tr(A^T B)$, et on définit pour toute matrice A fixée, l'application f_A sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(X) = AX - XA$.

1. Déterminer l'adjoint f_A^* de f_A.
2. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A \in Im(f_A)$.
3. Montrer que A est nilpotente si et seulement si A est semblable à $2A$.

Exercice 5 (calcul de $\zeta(2)$). **X/ENS** [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall\, x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ P_n(\cot an^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}$$
2. Déterminer les racines de P_n, ainsi que leur somme.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cot an^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot an^2(x)$.

   (b) En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Indications 1. On procède par existence-unicité. L'unicité est classique et partant de deux polynômes, on justifie $P_n - Q_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Pour l'existence, on s'inspire des polynômes de Tchebychev et on revient d'abord à un polynôme trignométrique en écrivant $\sin((2n+1)x) = Im((e^{ix})^{2n+1})$. 2. On cherche des racines sous la forme $z = \sin((2n+1)x)$ et on identifiera autant de racines que son degré. Pour la somme, il faudra exploiter les relations coefficients-racines et extraire le coefficient au degré $n-1$. 3.a) On a : $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit alors l'inégalité. 3.b) On utilise l'encadrement précédent qu'on spécifie en les racines de P_n... avant de passer à la limite.

Exercice 6 (convergence des sommes de Riemann et généralisation). [ ]

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. On note f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et considérons (x_i) la subdivision à pas constant $(b-a)/n$. On appelle **somme de Riemann** associée toute somme de la forme :
$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\theta_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{b-a}{n})f(\theta_i)$$
où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

1. (a) On suppose que f est de classe C^1 sur $[a, b]$, montrer que $S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\, dt$.

   (b) Déterminer alors la limite de (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n}(\prod_{k=1}^{n}(k+n))^{1/n}$.
2. On suppose désormais que f n'est définie que sur $]a, b]$ et qu'elle est monotone, continue et intégrable sur $]a, b]$.

   (a) Montrer qu'on a encore :
$$\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{(b-a)}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\, dt$$
   (b) En déduire quand $n \to +\infty$ la limite de $(\dfrac{n!}{n^n})^{1/n}$.

Indications 1.a) On contrôle la différence $|S_n(f) - \int_a^b f(t)\ dt|$: pour cela, on utilise les subdivisions afin de regrouper les éléments sous une même intégrale, puis on invoque l'inégalité des accroissements finis. 1.b) On justifie rapidement que $v_n > 0$ et on étudie $u_n = \ln(v_n)$: on se ramène alors au cas particulier des sommes de Riemann de la forme $\sum_{k=1}^{n} 1/n.f(k/n)$ avec f bien choisie. 2.a) La fonction étant monotone, on peut la supposer croissante et travailler par comparaison série-intégrale. Attention, on veillera à encadrer d'abord le teme général $\frac{(b-a)}{n}f(x_k)$ avant de sommer les inégalités pour k allant de 1 à $n-1$... 2.b) En passant au logarithme, on fait apparaître une somme de Riemann généralisée sur $]0, 1]$.

Exercice 7 (fonction génératrice d'une variable aléatoire). [ ]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on note g_X sa fonction génératrice définie sur $]-R_X, R_X[$ ($R_X > 0$).

1. On pose $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Montrer que g_Y est définie sur $]-R_Y, R_Y[$ avec $R_Y = R_X^{1/a}$ er $R_Y = +\infty$ si $R_X = +\infty$. Exprimer alors g_Y en fonction de g_X.
2. Justifier que g_X est définie en 1 et -1.
3. Etablir que :
$$\begin{cases} P(X \text{ pair}) = (g_X(1) + g_X(-1))/2 \\ P(X \text{ impair}) = (g_X(1) - g_X(-1))/2 \end{cases}$$
4. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X' \sim \mathcal{B}(n, p)$. Rappeler leur fonction génératrice, puis calculer les probabilités précédentes.

Indications 1. $Y(\Omega)$ est encore à valeurs dans $\mathbb{N}$, puis $g_Y(t) = E(t^Y)$. En factorisant par t^b, on peut établir que $R_X^{1/a}$ désigne un point de rupture. Reste à exprimer g_Y. 2. C'est immédiat : on majore le terme général en module. 3. Partant du membre de droite, il suffit de travailler par linéarité sur les sommes convergentes. 4. On revient au calcul des fonctions génératrices et on invoque la question précédente.

Exercice 8 (moyenne des itérés d'un endomorphisme). [ ]
Soient K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ qu'on suppose continu sur E tel que $f(K) \subset K$. On fixe $x \in K$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$$

En utilisant la suite (u_n), montrer que f possède au moins un point fixe dans K.

Indications K étant stable, u_n peut être vu comme une combinaison convexe d'éléments de K. On calcule alors la différence $f(u_n) - u_n$ et on montre que $\|f(u_n) - u_n\| \longrightarrow 0$. Mais (u_n) étant dans $K^{\mathbb{N}}$, on peut alors extraire une sous-suite convergente pour obtenir un point fixe de f par unicité de la limite.