Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (développement en série entière d'une fonction définie par une intégrale). [ ]

On note pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$, puis que f peut être prolongée par continuité en 0.
2. Montrer que f est développable en série entière, et calculer son rayon de convergence.

Questions du jury

- Rappeler le théorème de convergence sur les séries entières. Montrer alors qu'une série entière converge sur tout compact K inclus dans $B(0,R)$, où $R > 0$ désigne son rayon de convergence.
- Soit f une fonction développable en série entière sur $I =]-R,R[$. Justifier que f est de classe C^∞ sur I.

Exercice 2 (norme d'algèbre et applications). [ ]

Dans cet exercice, $\|.\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant pour tout couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

1. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.
2. Supposons que A et B commutent, établir que $e^A e^B = e^{A+B}$. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, e^A est inversible.
3. Montrer que l'application $A \longmapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. (a) Si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers 0.

   (b) En déduire que l'application $A \longmapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0, et donner sa différentielle en 0.

Questions du jury

- Rappeler la formule de Taylor avec reste intégrale. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k/k!$.
- On définit l'application $A \longmapsto \|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Etablir qu'il s'agit d'une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 (recherche du polynôme caractéristique). [ ]

Soit $A \in \mathcal{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $tr(A) = 8$. Déterminer son polynôme caractéristique.

Questions du jury

- Soit P un polynôme annulateur vérifiant $P(A) = 0$. Justifier rapidement que $Sp(A) \subset Racines(P)$.
- Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\chi_N(\lambda) = \lambda^n$.

Exercice 4 (théorème des moments pour une fonction continue). **CCINP 48** [ ]

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

1. Enoncer le théorème de Weierstrass d'approximation uniforme par des fonctions polynômiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f, c'est à dire :

$$\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   (a) Montrer que la suite $(P_n f)$ converge uniformément vers f^2.

   (b) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\,dt$.

   (c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,dt$. En déduire que f est nulle sur le segment $[0,1]$.

Exercice 5 (utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev). **CCINP 99** [ ]

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellements indépendantes et de même loi telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Prouver que pour tout $a > 0$:
$$P(|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)| \geq a) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$$
3. **Application** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? *On pourra considérer la suite* (Y_i) *de variables aléatoires de Bernoulli où* Y_i *rend compte de l'issue au ième tirage.*

Exercice 6 (caractérisation séquentielle). **CCINP 34** [ ]
Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A en termes de boules.
2. Démontrer alors que : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x$.
3. On suppose que A est un sev de E, justifier que $\overline{A}$ est encore un sev de E.
4. Démontrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

Exercice 7 (convergence simple et convergence uniforme). **CCINP 9** [ ]

1. Soit X un ensemble, et notons (g_n) une suite de fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme de la suite (g_n) vers g.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Etudier la convergence simple de (f_n).
   (b) La suite (f_n) converge t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite (f_n) converge t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 8 (convergence des sommes de Riemann). [ ]
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et considérons (x_i) la subdivision à pas constant $(b-a)/n$. On appelle **somme de Riemann** associée toute somme de la forme :
$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\theta_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{b-a}{n}) f(\theta_i)$$
où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

1. On suppose que f est de classe C^1 sur $[a, b]$, montrer que $S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\, dt$.
2. Déterminer alors la limite de (v_n) définie par :
$$v_n = \frac{1}{n} (\prod_{k=1}^n (k+n))^{1/n}$$

Indications 1. On contrôle la différence $|S_n(f) - \int_a^b f(t)\, dt|$: pour cela, on utilise les subdivisions afin de regrouper les éléments sous une même intégrale, puis on invoque l'inégalité des accroissements finis. 2. On justifie rapidement que $v_n > 0$ et on étudie $u_n = \ln(v_n)$: on se ramène alors au cas particulier des sommes de Riemann de la forme $\sum_{k=1}^n 1/n.f(k/n)$ avec f bien choisie.