Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (somme et produit de variables aléatoires qui convergent en probabilité). ▶ **Centrale 2** [ ]

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X, Y deux variables aléatoires discrètes qu'on suppose L^1, et $(X_n), (Y_n)$ des suites de variables aléatoires discrètes. On note $(*)$ la condition suivante :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0,\ P(|X_n - X| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \forall \epsilon > 0,\ P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

1. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et fixons $\epsilon > 0$. Justifier l'implication : $|x + y| \geq \epsilon \Rightarrow |x| \geq \epsilon/2$ ou $|y| \geq \epsilon/2$.

   (b) On suppose la condition $(*)$ satisfaite. Montrer que :

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $B(p)$, $p \in [0, 1]$. On pose $V_n = U_n + U_{n+1}$.

   (a) Dans le langage Python, construire la fonction $bernoulli(p : float) \longrightarrow int$ qui, pour tout $p \in [0, 1]$, simule une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
   On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i$. Construire alors la fonction $M(n : int, p : float) \longrightarrow float$ qui, pour tout entier n non nul et pour tout $p \in [0, 1]$, renvoie la valeur de M_n. Quelle hypothèse pouvez-vous faire quant à la limite ℓ de M_n ?

   (b) Etablir en toute rigueur que :

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|M_n - \ell| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. (a) Montrer que $P(|X| > M) \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) On suppose la condition $(*)$ satisfaite. Montrer que :

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X_n Y_n - (XY)| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 2 (limite d'une fonction). [ ]

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose continue et g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x - y) f(y)\, dy$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. On suppose que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Déterminer alors la limite de g en $+\infty$.

Questions du jury

- Rappeler le théorème fondamental de l'analyse, puis expliquer rapidement comment en obtenir une démonstration.
- Justifier que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x \arctan(t)/t\, dt$ peut être prolongée en une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0.

Exercice 3 (base orthogonale des polynômes d'Hermite). [ ]

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes (H_n) réels tels que :

$$\forall\ (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(tx - \frac{t^2}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x) \quad (*)$$

   Cette suite de polynômes désigne les **polynômes d'Hermite.**

2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|H_n'(x)| \leq e^{|x|}$.

3. Montrer que la série entière de terme général $t \longmapsto t^n H_n(x)$ a un rayon de convergence infini, et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$$
4. On fixe $t \in]-1, 1[$ et on pose $f_n(x) = t^n H_n(x)$. Prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ est dérivable terme à terme sur $\mathbb{R}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n' = H_{n-1}$.
5. Prouver alors que (H_n) désigne une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire :
$$< P, Q >= \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}\, dx$$
et préciser la norme euclidienne de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions du jury

- Rappeler le théorème de dérivation terme à terme pour les séries de fonctions. En notant $\sum f_n$ la série de fonctions associée, justifier qu'on a alors convergence uniforme sur tout compact $[a, b] \subset I$.
- Les fonctions d'une variable réelle sont-elles toutes développables en série entière ? Pouvez-vous donner des conditions suffisantes pour qu'une telle fonction soit développable en série entière ?

Exercice 4 (théorème de point fixe pour une application faiblement contractante). **X/ENS** [ ]

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. On note $f : K \longrightarrow K$ telle que :
$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
1. Montrer que f possède un unique point fixe, noté ℓ.
2. Soient $x_0 \in K$ et (x_n) la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_{n+1} = f(x_n)$.
Montrer que $x_n \longrightarrow \ell$.

Exercice 5 (trigonalisation simultanée). **X/ENS** [ ]

1. (a) Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Montrer que A et B possèdent un vecteur propre commun.
   (b) Etablir alors que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, A et B sont cotrigonalisables.
2. Peut-on étendre ce résultat à toute famille finie de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux ?
3. On considère $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qu'on suppose nilpotente telle que :
$$AN = NA$$
Justifier alors de deux façons que $\det(A + N) = \det(A)$.

Indications 1.a) Comme les matrices commutent, alors en notant $\lambda \in Sp(A)$, $E_A(\lambda)$ est stable par B et l'endomorphisme associé et induit sur $E_A(\lambda)$ possède au moins un vecteur propre qui est donc aussi vecteur propre pour A. 1.b) Par récurrence sur la taille des matrices : pour l'hérédité, on construit une première base de réduction à partir du vecteur propre commun qu'on complète, puis on travaille sur le bloc sous-jacent. 2. Par itération, on justifie d'abord que pour toute famille finie de matrices qui commutent, il existe toujours au moins un vecteur propre commun. A p fixé, on procède alors par récurence sur la taille des matrices. 3. Ou bien on cotrigonalise, ou bien on peut forcer la factorisation par A dans le déterminant et exploiter la multiplicativité du déterminant.

Exercice 6 (suites adjacentes). [ ]

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0, b_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$
1. Montrer que ces suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune ℓ.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\ell^2}{a_n})$, puis déterminer un équivalent de $a_n - \ell$.
On pourra calculer le rapport $(a_{n+1} - \ell)/(a_{n+1} + \ell)$ et obtenir une relation de récurrence.

Indications 1. On montre d'abord que $a_{n+1} - b_{n+1}$ est de signe constant, puis on justifie que (a_n) et (b_n) sont monotones. Reste à étudier la limite de la différence : pour cela, on sera obligé d'introduire ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives et de prouver que $\ell_1 = \ell_2$, ce qui donnera $a_n - b_n \longrightarrow 0$. Pour la valeur de leur limite commune, on multiplie les deux lignes afin d'exhiber une suite constante. 2. On a : $a_n b_n = \ell^2$, et on retrouve a_{n+1}. Reste à calculer le rapport $(a_{n+1} - \ell)/(a_{n+1} + \ell)$ pour obtenir une relation qu'on pourra exploiter.

Exercice 7 (nature d'une série définie par les intégrales de Wallis). [ ]
On définit les intégrales de Wallis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt$$

Retrouver un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$, puis en déduire la nature de la série $\sum (I_n)^\alpha$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indications On rappelle la méthode : par intégration par parties, on montre que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Puis, on établit que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante égale à $\pi/2$. En exploitant la monotonie de I_n et son signe, on retrouve alors par encadrement un équivalent simple de I_n. Pour l'étude de la série, on peut donc se ramener à l'étude d'un terme général d'une série de Riemann dont on connait le comportement asymptotique.

Exercice 8 (une autre preuve du théorème spectral). [ ]
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons u un endomorphisme symétrique de E. On définit alors l'application $f_u : E\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_u(x) = \frac{1}{\|x\|_2^2} < x, u(x) >$$

1. Montrer que f_u est bornée sur $S(0,1)$ et atteint ses bornes.
2. Etablir que f_u est composée d'applications différentiables et calculer sa différentielle en tout point.
3. Montrer alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de u.

Indications 1. $S(0,1) = \{x \in E, \|x\|_2 = 1\}$ désigne, en dimension finie, une partie compacte. Reste à invoquer le théorème des bornes atteintes pour les applications à valeurs réelles. 2. On voit $f_u(x) = g(x).h(x)$ et on calcule la différentielle de f_u par opérations sur les applications différentiables... 3. On procède par récurence sur $n \in \mathbb{N}^*$: pour $n = 1$, tout vecteur unitaire convient et pour l'hérédité, on introduit $a \in S$ un point en lequel f_u atteint son maximum avec $f_u(a) = \lambda$. On vérifie qu'il s'agit bien d'un vecteur propre, puis u étant symétrique, on peut travailler avec l'endomorphisme induit sur $a^\perp$.