Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (équivalent d'une somme de séries de fonctions). [ ]

On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Justifier que S, la somme de cette série de fonctions, est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Etablir que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$.

Questions du jury

- Citer le critère spécial des séries alternées et préciser les grandes étapes de sa démonstration.
- Rappeler les différents modes de convergence d'une série de fonctions et préciser les liens entre ces différentes convergences.

Exercice 2 (distance à un sous-espace vectoriel). [ ]

Soient $a_0, \dots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note :

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
2. On pose alors :
$$F = \{P \in E,\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$$
Etablir que F est un sev de E, puis déterminer la distance de X^n à F.

Questions du jury

- Soit E un espace euclidien. Rappeler le théorème de minimisation et préciser l'expression de $d(x,F)$ où $x \in E$, F un sev de E.
- Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis donner une preuve de ce résultat. Quelle est alors le cas d'égalité ?

Exercice 3 (réduction des matrices circulantes). [ ]

On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices circulantes, c'est à dire des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \text{ et on note } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^2, $J^3, \dots$ et J^n.
2. Montrer que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, puis préciser ses éléments propres.
3. En déduire que toute matrice circulante $A \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Questions du jury

- Rappeler la définition du polynôme caractéristique, puis donner la forme de son développement.
- Montrer que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude. De la même façon, justifier que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp(A) = Sp(A^T)$.

Exercice 4 (exemple de partie fermée et bornée, mais non compacte). **CCINP 58** [ ]

1. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée et bornée.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{deg(P)} |a_i|$$

   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in E,\ \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour deux entiers naturels $n \neq m$. $S(0,1)$ est-elle compacte dans E ?

Exercice 5 (un autre exemple des séries de Bertrand). **CCINP 5** [ ]

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. (a) On suppose $\alpha \leq 0$. En utilisant une minoration simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) On suppose $\alpha > 0$. Etudier la nature de la série. *On pourra utiliser la fonction* $f : x \longmapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(e-(1+1/n)^n)e^{1/n}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 6 (étude d'une fonction de classe C^1). **CCINP 57** [ ]

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$, $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (somme de deux séries entières). **CCINP 22** [ ]

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Justifier.
2. (a) Donner le développement en série entière, en précisant le rayon de convergence, de la fonction :

$$f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$$

   (b) La série obtenue est-elle convergente pour $x = 1/4$, $x = 1/2$ et $x = -1/2$? Dans ce cas, la somme est-elle continue en ces points ?

Exercice 8 (loi de Rademacher). [ ]

Dans cet exercice, nous étudions le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.
A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(S_n = 0)$.
   Calculer p_0, p_1 et p_2. Puis, justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.
3. On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

   (b) Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

   (c) On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que : $p_{2m} = \binom{2m}{m}\dfrac{1}{4^m}$.

Indications 1. S_n représente simplement la position du pion après n étapes. 2. Il suffit à chaque fois d'interprèter la situation à l'aide des déplacements à droite et à gauche modélisés par les évènements $(X_k = 1)$ ou $(X_k = -1)$... 3.a) On détermine les valeurs prises par Y_k et les probabilités associées. 3.b) Par transfert d'indépendance, Z_n peut être vue comme une somme de Bernoulli indépendantes : c'est une loi binomiale. 3.c) Cela découle de la relation entre Z_n et S_n, et ainsi $p_{2m} = P(S_{2m} = 0) = P(Z_{2m} = m)$.