Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (approximation d'un vecteur propre). ▶ **Centrale 2** [ ]

On note A la matrcie définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier rapidement que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et donner les sous-espaces propres associés.
2. On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ et on pose $X = (1,1,1)^T$.
Ecrire une foction Python permettant d'illustrer le comportement asymptotique de la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$Y_k = \frac{A^k X}{\|A^k X\|}$$
3. Plus généralement, on considère $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer alors que pour toute matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul, la suite $(Y_k = \dfrac{S^k X}{\|S^k X\|})$ converge vers un vecteur propre de S.

Exercice 2 (calcul explicite des intégrales de Wallis). [ ]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\, dt$$

1. Montrer que J est solution de : $(\mathcal{E}) \quad xy'' + y' + xy = 0$.
2. Déterminer les solutions développables en série entière de $(\mathcal{E})$.
3. Etablir que J est développable en série entière, puis préciser son développement.
4. En comparant les résultats obtenus, donner l'expression des intégrales de Wallis :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\, dt$$

Questions du jury

- Citer le critère C^1 pour les intégrales à paramètre, puis proposer une démonstration de ce résultat.
- Retrouver un équivalent de W_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 (convergence en probabilité). [ ]

Soient n, a deux entiers naturels non nuls. On dispose de n urnes et de $N = na$ boules. Ces boules sont alors réparties de façon indépendante et équiprobable entre les urnes.

On nomme Y_n la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides et $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$, puis préciser leur limite.
3. Montrer alors que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|S_n - e^{-a}| \geq \epsilon) = 0$.

Questions du jury

- On note X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Etablir que $E(XY) = E(X)E(Y)$. La réciproque est-elle vraie ?
- On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qu'on suppose d'espérance finie. Montrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Exercice 4 (recherche d'un équivalent). **X/ENS** [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)}\, dx$$

Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$, puis étudier la série $\sum \frac{u_n^\alpha}{n^\beta}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (théorème de Dunford). **X/ENS** [ ]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et considérons u un endomorphisme de E. Montrer l'existence d'un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

$$\begin{cases} u = d + n \\ dn = nd \\ d \text{ est diagonalisable et } n \text{ est nilpotent} \end{cases}$$

Indications On procède par existence et unicité. Pour l'existence, comme χ_u est scindé sur $\mathbb{C}$, on peut exhiber la décomposition spectrale de E. On définit alors d et n sur chacun des sous-espaces caractéristiques par $d_{E_i} = \lambda_i.id_{E_i}$ et $n_{E_i} = u_{E_i} - \lambda_i.id_{E_i}$ avant de vérifier qu'ils conviennent. Pour l'unicité, notons (d', n') un autre couple satisfaisant les conditions de Dunford tel que $u = d + n = d' + n'$. En particulier, d' et u commutent : ainsi, sur chaque E_i, les endomorphismes d'_{E_i} et $d_{E_i} = \lambda_i.id_{E_i}$ commutent, donc d' et d sont codiagonalisables et $d - d'$ diagonalisable. De même, n' et u commutent : ainsi, sur chaque E_i, les endomorphismes n'_{E_i} et n_{E_i} commutent. On en déduit que $d - d' = n' - n$ est à la fois diagonalisable et nilpotent, d'où $d - d' = n' - n = 0$.

Exercice 6 (sous-groupes finis de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et groupe spécial linéaire). [ ]

On se place dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et on note :

$$\mathcal{SL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\ det(M) = 1\}$$

1. Montrer que $\mathcal{SL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.
2. (a) On note H un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Justifier rapidement qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = \mathbb{U}_p =< e^{i2\pi/p} >$.

   (b) Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ qu'on suppose fini et tel que :

   $$\mathcal{G} \cap \mathcal{SL}_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$$

   Montrer que G est cyclique.

Indications 1. On revient à la caractérisation des sous-groupes de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ et on fera intervenir la multiplicativité du déterminant. 2.a) On invoque le petit thérème de Lagrange de sorte que $H \subset \mathbb{U}_p$, et on conclut à l'aide des cardinaux. 2.b) Soit $M \in \mathcal{G}$, on a donc $det(M) = 1 \Rightarrow M = I_n$. En fait, le déterminant définit naturellement un morphisme de G sur $\mathbb{C}^*$ et ainsi, la condition précédente nous livre $Ker(det) = \{I_n\}$. On en déduit que $det : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est injective et on a même $det : G \longrightarrow det(G)$ bijective de sorte que G est isomorphe à $det(G)$. Par isomorphisme, l'image de G est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, c'est à dire $det(G) =< e^{i2\pi/p} >$ cyclique. Par conséquent, G image réciproque d'un tel groupe est aussi cyclique.

Exercice 7 (décomposition des polynômes réels positifs). [ ]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer alors que :

$$P \text{ est de signe constant positif } \Leftrightarrow \exists\, (U, V) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = U^2 + V^2$$

Indications On procède par double implication. Le sens réciproque est immédiat. Pour le sens direct, si P est constant c'est immédiat, sinon $deg(P) \geq 1$ et on peut factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ de sorte que $P(X) = a_n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.\prod_{j=1}^s (X - \mu_j)^{\beta_j}(X - \overline{\mu_j})^{\beta_j}$. Comme P est positif, en étudiant localement le signe du produit, on peut justifier que pour toute racine réelle, α_i est nécessairement pair. On a alors pour un polynôme C à préciser... $P = C.\overline{C} = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$.

Exercice 8 (intégrabilité d'une somme). [ ]

Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + xn + n^2)}{1 + n^2 e^x}\, dx$$

Indications Dans un premier temps, on justifie que la série est convergente pour x fixé dans $\mathbb{R}_+$, puis en notant S sa somme, on montre qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ à l'aide des théorèmes sur les séries de fonctions. Reste alors à justifier l'intégrabilité : pour cela, on peut invoquer le théorème d'intégration terme à terme... car il s'agit bien d'un résultat qui nous livre l'intégrabilité de S sur $\mathbb{R}_+$.