Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (expression d'une intégrale à paramètre). [ ]

Soit g la fonction d'une variable réelle définie par :

$$g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} \, dt$$

1. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etablir que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour $x > 0$.
3. En déduire l'expression de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Questions du jury

- Retrouver le DSE de la fonction arctan sur $]-1, 1[$. Peut-on prolonger ce développement aux bords du domaine ?
- Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Exercice 2 (limite d'une série vectorielle). [ ]

On considère $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a \in [0, 1[$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \; X^T A X \leq a X^T X$$

1. Montrer que, sous ces conditions, la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} A^k$ converge vers une limite S symétrique.
2. Etablir alors que :
$$\exp(S) = I_n + A$$

Questions du jury

- On suppose que A est diagonalisable. Justifier que $det(\exp(A)) = e^{tr(A)}$. Peut-on généraliser ce résultat sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Exercice 3 (échange des symboles $\sum$ et $\int$). [ ]

On note f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2 - 1}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt$.
2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}$.

Questions du jury

- Citer un autre théorème d'intégration permattant d'échanger les symboles $\sum$ et $\int$.
- Déterminer le développement en série entière en 0 des fonctions arctan et arcsin. Quel théorème d'intégration terme à terme se cache derrière ce calcul ?

Exercice 4 (utilisation des fonctions génératrices). **CCINP 96** [ ]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$.
La fonction génératrice associée est alors $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Justifier que G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$.
2. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer de deux façons que pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$.
3. **Application** Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[$ l'expression de $G_{S_n}(t)$, puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 5 (résolution d'un système de congruence). **CCINP 94** [ ]

1. Enoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ qu'on suppose premiers entre eux et notons $c \in \mathbb{N}$. Prouver que :
$$\begin{cases} a|c \\ b|c \end{cases} \Leftrightarrow ab|c$$
3. On considère la système de congruence $(S)\begin{cases} x \equiv 6 \ [17] \\ x \equiv 4 \ [15] \end{cases}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 6 (application du théorème de convergence dominée). **CCINP 26** [ ]

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Etudier la monotonie de (I_n).
   (b) Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice 7 (étude d'une chaîne de Markov). **CCINP 101** [ ]

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau notés A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement "l'animal se trouve en A (resp. en B, en C) après son n-ème trajet" et on pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. De la même façon, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

On considère alors la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Prouver que $-1/2$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
5. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $D = P^{-1}AP$.
6. Expliquer alors comment obtenir a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 8 (étude des extremas). [ ]

On considère l'application $f : (x, y) \longmapsto y(x^2 + \ln^2(y))$.

1. Préciser son domaine de définition U et justifier qu'il s'agit bien d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les extremas locaux et globaux de f sur U.

Indications 1. On peut représenter U dans le plan euclidien et on justifie que le complémentaire est fermé. 2. On identifie d'abord les points critiques sur U, puis on étudie les extremas locaux à l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Pour les extremas globaux, on pourra revenir au signe de la différence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ sur U.