Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (convergence des sommes de Riemann). ▶ **Centrale 2** [ ]

Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est continue sur $[a,b]$. Rappeler le théorème de convergence des séries de Riemann, puis en faire une démonstration.
2. Pour tout $r \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, on définit l'intégrale de Poisson par :
$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos(t) + r^2)\ dt$$
   (a) En utilisant la méthode des trapèzes, construire une fonction Python qui permet d'obtenir une valeur approchée de $I(r)$ en fonction de r.
   (b) On pose $r = e$. Quelle hypothèse pouvez-vous faire quant à la valeur de $I(e)$?
   (c) En jouant alors sur les valeurs de r, quelles autres hypothèses pouvez-vous faire ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Etablir que :
$$(\frac{r+1}{r-1}).(r^{2n} - 1) = \prod_{k=1}^{n} (1 - 2r\cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2)$$
4. Justifier la convergence de $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos(t) + r^2)\ dt$, puis retrouver sa valeur exacte en fonction de r.

Exercice 2 (propriétés de la comatrice). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On note $com(A)$ la comatrice de A. Montrer que si A et B sont inversibles, alors on a :
$$com(AB) = com(A)com(B)$$
   L'égalité est-elle encore vraie si A ou B n'est pas inversible ?
2. On suppose que A et B sont semblables, établir que $com(A)$ et $com(B)$ sont encore semblables.
3. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que :
$$tr(com(A)) = (-1)^{n-1} \chi_A'(0)$$

Questions du jury

- Rappeler la définition de la comatrice, puis établir que pour toute matrice A, $A.com(A)^T = det(A) I_n$.
- Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De la même façon, établir que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3 (calcul de la différentielle de la fonction inverse). [ ]

On note encore $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles.

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On définit alors $f : M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M^{-1}$.
   (a) Justifier rapidement que f est différentiable sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer alors que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $df_M(H) = -M^{-1} H M^{-1}$.

Questions du jury

- Donner la définition d'une application différentiable, puis retrouver la différentielle en 0 de la fonction exp : $M \longmapsto \exp(M)$.
- On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Etablir que $\|.\|_2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Exercice 4 (théorème d'Abel-Dirichlet). **X/ENS** [ ]

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à $R > 0$. On suppose que la série $\sum a_n R^n$ converge.
   (a) Montrer que la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur le segment $[0, R]$.
   (b) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Déterminer alors les valeurs exactes de :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 5 (théorème de Gauss-Lucas). **X/ENS** [ ]

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
2. Déterminer le plus grand entier $n \geq 2$ tel que :
$$P_n(X) = (X+1)^n - X^n - 1$$
ait ses racines non nulles toutes de module 1.

Indications 1. Partant de la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, on décompose d'abord P'/P en éléments simples. En notant z une racine de P', ou bien z est une racine de P et c'est fini, ou bien on a : $P'(z)/P(z) = 0$, et en isolant z on peut l'écrire comme combinaison convexe des racines de P. 2. Pour $n = 2$, il n'y a pas d'autre racine que 0. Pour $n \geq 3$, on peut déterminer les racines z_k de P' en se ramenant aux racines $(n-1)$-ièmes de l'unité. Or d'après le théorème précédent, on doit avoir par exemple $|z_1| \leq 1$ puisque celles-ci doivent rester dans le disque unité. On justifie alors que pour $n \geq 8$, $|z_1| > 1$ de sorte que $n < 8$, puis que $n = 7$ convient.

Exercice 6 (une application fine de Cauchy-Schwarz). [ ]

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit ϕ sur E^2 par $\phi(M, N) = tr(M^T N)$.

1. Montrer que ϕ désigne un produit scalaire sur E.
2. On note $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée. Montrer qu'il s'agit d'une norme d'algèbre vérifiant pour tout $(M, N) \in E^2$:
$$\|MN\|_2 \leq \|M\|_2.\|N\|_2$$
3. On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles O telles que $OO^T = O^T O = I_n$.
   (a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif.
   (b) Etablir alors que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Indications 1. On revient à la définition d'un produit scalaire réel. 2. Partant du membre de gauche, on revient aux coefficients et on cherche à reconnaître l'expression d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ avant de majorer par Cauchy-Schwarz... 3.a) On établit en fait que c'est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. 3.b) En dimension finie, il suffit de justifier que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.

Exercice 7 (la transformation d'Abel). [ ]

On considère la série $\sum a_n b_n$, où (a_n) désigne une suite à valeurs réelles et (b_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k, \; A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.
2. On se place dans le cas particulier où :
$$\begin{cases} \text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante de limite nulle} \\ \text{la suite } (B_n) \text{ est bornée} \end{cases}$$
Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.
3. En déduire que la série $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Indications 1. On a $S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ avec $b_k = B_k - B_{k-1}$. Reste à distribuer la somme avant de réindexer. 2. On travaille sur l'expression précédente et on montre que, sous ces nouvelles hypothèses, chacun des termes converge. 3. On applique le résultat précédent : pour montrer que (B_n) est bornée, on n'hésitera pas à transformer d'abord la somme en se plongeant dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8 (loi de la distance entre deux variables aléatoires). [ ]

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X, Y \hookrightarrow G(p)$ avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$ et on définit $Z = |X - Y|$.

1. Calculer $P(Z = 0)$ et établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = n) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.
2. Montrer que Z admet une espérance et déterminer son expression.
3. Montrer que $E((X-Y)^2) = 2V(X)$. En déduire que Z admet une variance et la calculer.

Indications 1. A l'aide des opérations ensemblistes, on décrit l'évènement $(Z = 0) = \sqcup_{k \in \mathbb{N}^*}((X = k) \cap (Y = k))$ et on invoque la σ-additivité. De la mêm façon pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(Z = n) = (X - Y = n) \sqcup (Y - X = n)$... 2. On essaie de reconnaître des sommes de séries usuelles. 3. X, Y suivant la même loi, il suffit de développer l'identité remarquable et d'exploiter les propriétés de l'espérance. On en déduit que Z possède un moment d'ordre 2 et la formule d'Huygens nous livre sa valeur.