Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité). [ ]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on définit la matrice B par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ A & O_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que B est semblable à la matrice $B' = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -A \end{pmatrix}$.
2. Etablir alors que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

Questions du jury

- Rappeler la définition d'une matrice de passage. Justifier alors pourquoi toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage et réciproquement.
- Donner une CNS pour qu'une matrice A soit diagonalisable faisant intervenir des polynômes annulateurs. Et dans le cas où A est diagonalisable, retrouver l'expression de son polynôme minimal.

Exercice 2 (étude du nombre de succès après un premier succès). [ ]
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Un individu joue avec une pièce non nécessairement équilibré : la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N le nombre de lancers nécessaires. Si pile apparait au n-ième lancer, il lance à nouveau cette pièce n fois et on note X le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers.

1. Préciser la loi de N ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $(N = n)$.
2. Déterminer la loi du couple (N, X).
3. Démontrer que :
$$P(X = 0) = \frac{q}{1+q} \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$
4. Montrer alors que X a la même loi que le produit de deux variables indépendantes $Y \hookrightarrow B(1/1+q)$ et $Z \hookrightarrow G(1/1+q)$.
5. En déduire $E(X)$.

Questions du jury

- Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quel lien faites-vous avec l'espérance de X ?
- On note X, Y deux variables aléatoires discrètes qu'on suppose indépendantes. Etablir que $E(XY) = E(X)E(Y)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 (densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$). [ ]
On note encore $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Etablir que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Est-il aussi une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En considérant la suite de matrices $A_p = A - \frac{1}{p} I_n,\ p \in \mathbb{N}^*$, justifier que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   (b) Le résultat précédent est-il encore vrai pour B quelconque ?

Questions du jury

- Justifier que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude. Prouver rapidement votre résultat, puis donner d'autres invariants de similitude.
- On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4 (étude d'une fonction de classe C^1). **CCINP 52** [ ]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Prouver que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. En déduire que f est bien définie.
2. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence des dérivées partielles et les calculer.
   (b) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 (une application du théorème de la double limite). **CCINP 53** [ ]

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$$

1. Prouver que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée f.
2. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. La série converge t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?
3. La série converge t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
4. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
5. Déterminer alors la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6 (une autre application de la réduction aux systèmes différentiels). **CCINP 75** [ ]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A. trouver une base B dans laquelle la matrice de f est :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ où } a,b,c \text{ seront précisés}$$

3. En déduire la résolution du système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$.

Exercice 7 (spectres de $u \circ v$ et $v \circ u$). **CCINP 83** [ ]

Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $u : P \longmapsto \int_1^X P(t)\,dt$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $Ker(u \circ v)$ et $Ker(v \circ u)$. Le résultat précédent est-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. On suppose que E est de dimension finie. Justifier que le résultat de la première question est toujours vrai, même pour $\lambda = 0$.

Exercice 8 (étude de la nature d'une série). [ ]

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

1. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \pi/2 + \alpha\pi/n + O(1/n^2)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ converge.
3. La série est-elle absolument convergente ?

Indications 1. On factorise par n^2 sous le radical, afin de faire apparaître un DL de la forme $(1+u)^{1/2}$ quand $u \to 0$. 2. On détermine les premiers termes du développement limité associé au terme général, puis on justifie qu'on a des termes de séries convergentes. 3. On peut invoquer le théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs.