Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (approximation de l'unité). [ ]

On considère une **approximation de l'unité**, c'est à dire une suite (φ_n) d'éléments de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1 \text{ et } \forall \delta > 0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à support compact, on note le produit de convolution :

$$f * \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt$$

1. Justifier l'existence des intégrales définissant le produit de convolution sur $\mathbb{R}$, et montrer qu'elles sont effectivement égales.
2. Montrer alors que la suite $f * \varphi_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. Etablir que l'ensemble des fonctions $\varphi_n : x \longmapsto \dfrac{ne^{-n^2x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ définissent un exemple d'approximation de l'unité.
4. En déduire que l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans l'ensemble des éléments de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact, au sens de la norme uniforme.

Questions du jury

- Donner deux autres théorèmes d'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment.
- Rappeler le lemme de Riemann-Lebesgue, puis en utilisant un résultat de densité, prouver ce résultat lorsque la fonction considérée est supposée seulement continue sur $[a, b]$.

Exercice 2 (exponentielle de matrices réelles diagonalisables). [ ]

Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $\exp(A) = \exp(B)$.
Montrer que nécessairement $A = B$.

Questions du jury

- Rappeler le théorème d'interpolation de Lagrange, et en donner une preuve.
- Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que A, B diagonalisables et $AB = BA$, alors A et B sont codiagonalisables. Peut-on étendre ce résultat à toute famille finie de matrices diagonalisables qui commutent deux à deux ?

Exercice 3 (déterminant d'une matrice circulante modulo p). **X/ENS** [ ]

Soit p un nombre premier et considérons $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{Z}^p$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a_{p-1} & a_0 & \ldots & a_{p-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 \end{vmatrix} \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} \quad [p]$$

Exercice 4 (nombre moyen de points fixes d'une permutation). **X/ENS** [ ]

On considère f un morphisme d'un groupe fini $(G, .)$ dans $(O(\mathbb{R}^n), \circ)$, et on définit :

$$p = \frac{1}{card(G)} \sum_{g\in G} f(g)$$

1. Etablir que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Im(p) = \cap_{g\in G} Ker(f(g) - id)$.
2. En déduire le nombre moyen de points fixes de l'ensemble des éléments du groupe symétrique S_n.

Exercice 5 (un autre preuve de l'inégalité arithmético-géométrique). [ ]

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.
On fixe $s > 0$ et on définit les fonctions f, g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \left\{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\right\}$.

1. On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U_n.
2. Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est atteint sur $X_s \cap U_n$.
3. On note $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.
   (a) Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = f(a)/\lambda$.
   (b) Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n\,, \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Indications 1. Les fonctions sont polynomiales, et donc $\mathcal{C}^1$ sur U_n. 2. On justifie que X_s est compact, puis on utilise le théorème des bornes atteintes. 3.a) C'est immédiat, cela découle du théorème des extremas liés. 3.b) f est majorée par sa valeur maximale $f(a)$: il suffit d'identifier λ pour obtenir une expression simple de $f(a)$ et retrouver l'inégalité sur $X_s \cap U_n$. Pour finir, on raisonne par disjonction des cas : si un x_i est nul, c'est immédiat. Sinon, on pose $s = \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$ et on a l'inégalité précédente.

Exercice 6 (calcul de l'intégrale de Dirichlet). [ ]

On note $f : x \in\,]0, \pi] \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin((\frac{2n+1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\, dt$.
   (a) Justifier l'existence de I_n.
   (b) Calculer $I_{n+1} - I_n$, puis en déduire la valeur de I_n.
3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente et déduire sa valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin((\frac{2n+1}{2})t)\, dt$.

Indications 1. On prolonge en 0 à l'aide des développements limités, et on vérifie que le prolongement est bien C^1. 2.a) L'intégrale est faussement impropre en 0. 2.b) A l'aide des formules trigonométriques, on montre en fait que I_n est constante. 3. C'est une question classique: on découpe l'intégrale sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$: la première intégrale présente encore un faux problème, pour la seconde, on accélère la convergence à l'aide d'une Ipp. Reste à développer la dernière intégrale avant d'invoquer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 7 (méthode de Lagrange et raccordement des solutions). [ ]

On considère l'équation différentielle : $(\mathcal{E})\ \ xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$.

1. Déterminer une solution f_1 non nulle de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En posant $f_2(x) = \lambda(x)f_1(x)$, déterminer une autre solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, puis donner un système fondamental de solution de cette équation sur chacun de ces intervalles.
3. Déterminer alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Indications 1. Par analyse-synthèse, on cherche une solution DSE... et en imposant $a_0 = 1$, on propose une solution non triviale. 2. En utilisant la méthode de Lagrange, on obtient une nouvelle équation d'ordre 1 en λ'... il suffira de primitiver pour trouver f_2, et donner S_0 sur chacun des intervalles. 3. Par analyse-synthèse, on raccorde en 0.

Exercice 8 (équivalent de la somme d'une série entière). [ ]

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

1. Préciser le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n}{n!}x^n$.
2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n$. Donner la limite de $e^{-x}f(x)$ quand $x \to +\infty$, puis en déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Indications 1. On reconnaît la série harmonique alternée, on en déduit un équivalent de $a_n/n!$. 2. Seule la limite est délicate, pour cela on remplace astucieusement $a_n = (a_n - \ln(2)) + \ln(2)$, et on contrôle la première somme à l'aide du CSSA.