Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (automorphismes intérieurs). [ ]

Soit $(G, *)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on note a^{-1} son symétrique pour la loi $*$ et $\tau_a : G \longrightarrow G$ définie par :

$$\tau_a : x \longmapsto a * x * a^{-1}$$

1. Montrer que τ_a est un automorphisme du groupe $(G, *)$. Il est alors appelé **automorphisme intérieur**.
2. Vérifier que pour tout $(a, b) \in G^2$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a*b}$.
3. On note $T = \{\tau_a,\ a \in G\}$ l'ensemble des automorphismes intérieurs. Etablir que T est un sous-groupe de $S(G)$, le groupe des bijections de G.

Questions du jury

- Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et on note $U(A)$ l'ensemble des éléments inversibles. Etablir que $(U(A), \times)$ est toujours un groupe.
- On note S_n le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. Décrire S_2, puis S_3 et justifier que S_n est engendré par les transpositions.

Exercice 2 (nature de deux séries). [ ]

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}}$$

1. Déterminer la limite de (u_n) et préciser un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.
2. Déterminer alors la nature des séries $\sum \dfrac{1}{u_n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$.

Questions du jury

- Enoncer le théorème de sommation des équivalents.
- On considère $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exercice 3 (convergence en moyenne et convergence en probabilités). [ ]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que :

- (X_n) converge en probabilité vers une variable X si pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- (X_n) converge en moyenne vers une variable X si $E(|X_n - X|) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer que la convergence en moyenne entraîne la convergence en probabilité de la suite (X_n).
2. On considère alors (Z_n) une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On pose :
$$\forall\, n \geq 1,\ Y_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k$$
   (a) Calculer pour tout $n \geq 1$, $P(Y_n \neq 0)$.
   (b) En déduire que (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
   (c) Calculer pour tout $n \geq 1$, $E(Y_n)$.
   (d) La suite (Y_n) converge t-elle en moyenne vers la variable certaine égale à 0 ?

Questions du jury

- Rappeler l'inégalité de Markov, puis redémontrer d'où vient cette inégalité.
- Quelle interprétation peut-on donner à la loi de Poisson ? Pouvez-vous le justifier par un résultat asymptotique ?

Exercice 4 (application du théorème des noyaux). **CCINP 93** [ ]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $Im(u) \oplus Ker(u) = E$.
2. (a) Enoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $Im(u) = Ker(u^2 + u + id_E)$.
3. On suppose que u n'est pas bijectif. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 5 (matrices symétriques et antisymétriques). **CCINP 92** [ ]

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose pour tout $(A, B) \in E^2$, $< A, B >= tr(A^T B)$.

1. Prouver que $< .,. >$ désigne un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Etablir que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 6 (solutions développables en série entière). **CCINP 32** [ ]

On considère l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle non trivial de la forme $]-r, r[$, $r > 0$. Déterminer alors l'expression de ces solutions.
2. On se place sur $]0, 1[$. Est-ce que plus généralement les solutions de cette équation différentielle sont nécessairement des restrictions de fonctions développables en série entière ?

Exercice 7 (caractérisation des racines multiples). **CCINP 85** [ ]

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X-a, \ldots, (X-a)^n)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.
2. Détermier deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P(X) = X^5 + aX^2 + bX$ et donner sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 (application du théorème de convergence dominée). [ ]

Sous réserve d'existence, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x}\,dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie.
2. Etablir que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Indications 1. A $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction $f_n : x \longmapsto e^{-x}/(n+x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et en $+\infty$, on peut justifier l'intégrabilité par comparaison. 2. Pour la limite, il suffit d'appliquer le TCD. Reste à prouver l'équivalence demandée : on a par exemple $I_n = \frac{1}{n} J_n$, et on applique une nouvelle fois le TCD à J_n pour établir que $J_n \longrightarrow 1$.