Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (convergence en probabilité). [ ]

Une action vaut initialement 1 EUR. A chaque instant $n \geq 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables aléatoires Z_n sont indépendantes et de même loi telles que :

$$P(Z_n = 1 + a) = P(Z_n = 1 - a) = 1/2, \text{ avec } a \in]0, 1[$$

On note X_n la valeur de l'action à l'instant n. On pose $Y_k = \ln(Z_k)$ et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\widehat{Y_n} = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = 1$.
2. Calculer la limite de $\mathbb{V}(X_n)$ quand $n \to +\infty$.
3. Etablir qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} P(\widehat{Y_n} > -\delta) = 0$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n > \epsilon) = 0$.

Questions du jury

- Rappeler l'expression générale de $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n)$, où X_i désigne des variables aléatoires discrètes.
- Enoncer le théorème de Bienaymé-Tchebychev. En déduire une démonstration de la loi faible des grands nombres.

Exercice 2 (convergence d'une suite). [ ]

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \sin(2\pi n! e)$ est convergente et préciser sa limite.

Questions du jury

- Rappeler le DSE de la fonction exp, puis expliquer comment on peut l'obtenir.
- Définir une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum A^k/k!$ est convergente.

Exercice 3 (décomposition de Fitting). **X/ENS** [ ]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que les suites $(Im(u^k))$ et $(Ker(u^k))$ sont strictement monotones pour l'inclusion et constantes à partir d'un même rang $p \leq n$.

   (b) Etablir que la suite $(Ker(u^k))$ "s'essoufle", c'est à dire que la suite des différences $(dim(Ker(u^{k+1})) - dim(Ker(u^k)))$ est dércoissante.
2. Montrer qu'on a $E = Ker(u^p) \oplus Im(u^p)$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} N & O \\ O & C \end{pmatrix}$, où N est une matrice carrée nilpotente, C une matrice inversible.

Exercice 4 (intégrale de Fresnel). **X/ENS** [ ]

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2 + i}\, dx$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$ et calculer la valeur commune.
2. Montrer que la fonction F est continue et étudier la limite de F en $+\infty$.
3. Etablir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer $F'(t)$ pour tout $t > 0$.
4. Justifier alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ converge et retrouver sa valeur.

Exercice 5 (norme d'un endomorphisme symétrique). [ ]

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire et on considère f un endomorphisme continu de E qu'on suppose autoadjoint, c'est à dire tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, f(y) >$$

On note encore $|||f|||$ la norme triple de f subordonnée à la norme euclidienne.

1. Montrer que $|||f||| = \sup_{\|x\|_2=1} |< f(x), x >|$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension finie. Justifier que :

$$|||f||| = \rho(f)$$

Indications 1. On revient à la définition de la norme triple : en notant $K = \sup_{\|x\|_2=1} |< f(x), x >|$, on obtient une première inégalité par Cauchy-Schwarz. De plus, avec $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$, on peut calculer $< f(x+y), x+y > - < f(x-y), x-y >$, on en déduit que $< f(x), y > \leq K$... il suffira de choisir y convenablement pour obtenir la seconde inégalité. 2. De la même façon, si $\lambda \in Sp(f)$, on a immédiatement $|\lambda| \leq K$. Dans l'autre sens, pour $\|x\|_2 = 1$, il suffit de décomposer $|< f(x), x >|$ dans une base orthonormée de vecteurs propres, et ceci avant de majorer par $\rho(f)$.

Exercice 6 (convergence uniforme sur tout compact). [ ]

Soit $z \in \mathbb{C}$, on veut montrer que :

$$(1 + \frac{z}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et on pose $m = \max\{|a|, |b|\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a^n - b^n| \leq |a - b|.nm^{n-1}$.
2. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{C}$, $|e^{nu} - (1+u)^n| \leq |u|^2.ne^{n|u|}$, puis établir la convergence simple demandée.
3. On note $f_n : z \longmapsto (1 + \frac{z}{n})^n$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction exponentielle sur tout compact K.

Indications 1. C'est immédiat par la formule de factorisation. 2. On exploite l'inégalité précédente, et on affine la majoration obtenue, à l'aide notamment du DSE de l'exponentielle. On pourra alors prendre $u = z/n$ pour justifier la convergence simple. 3. On travaille sur tout compact K inclus dans $\mathbb{C}$, donc borné.

Exercice 7 (diagonalisabilité d'une matrice par blocs). [ ]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on définit la matrice B par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ A & O_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que B est semblable à la matrice $B' = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -A \end{pmatrix}$.
2. Etablir alors que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

Indications 1. On calcule P^2, et il est alors facile de donner P^{-1}. On vérifie ensuite que $PBP^{-1} = B'$. 2. D'après 1, on préfère travailler entre A et B'. Par double implication : pour le sens direct, si A est diagonalisable, on transforme les blocs dans B' avant de faire apparaître un produit de matrices par blocs de la forme QDQ^{-1}. Pour le sens réciproque, si B' est diagonalisable, on invoque l'existence d'un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(B') = 0$, et donc $P(A) = 0$.

Exercice 8 (étude qualitative de solutions). [ ]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qu'on suppose continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E})\ \ y''(x) + f(x)y(x) = 0$$

1. Notons y une solution bornée de $(\mathcal{E})$. Montrer que nécessairement $y'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer alors que tout système fondamental de solutions de S_0 contient au moins une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Indications 1. On intègre l'égalité sur $[0, X]$ pour obtenir $y'(X)$, puis on justifie que la limite est finie en $+\infty$. En notant ℓ cette limite, on raisonne par l'absurde : par exemple, si $\ell > 0$, il existe $A \geq 0$ tel que $y'(x) \geq \ell/2$ sur $[A, +\infty[$... ce qui nous permet après intégration de contredire le fait que y soit bornée ! 2. Par l'absurde, on suppose que y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes bornées et on montre que le wronskien est constant... et égal à 0 grâce à la question précédente. C'est impossible car elles sont indépendantes.