Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (convergence d'une suite). [ ]
Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n\sin(2\pi n!e)$ est convergente et préciser sa limite.

Questions du jury

- Rappeler le développement en série entière de l'exponentielle réelle. Peut-on étendre ce développement sur $\mathbb{C}$? sur E un espace vectoriel quelconque ?
- Enoncer le théorème d'encadrement pour une suite réelle, et démontrer rapidement votre résultat.

Exercice 2 (équivalent d'une somme de série de fonctions). [ ]
Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, établir que pour tout $x > 0$,
$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq xf(x) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{x}{1+x^2}$$
3. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Questions du jury

- Rappeler le théorème de dérivation pour les séries de fonctions. Avec les notations du théorème, justifier qu'on a aussi convergence uniforme sur tout compact de la série $\sum f_n$.
- Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 (intégrale généralisée à poids). [ ]
On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose :
$$\phi(P,Q) = \int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$$

1. Justifier que ϕ est bien définie, puis montrer que ϕ désigne un produit scalaire sur E.
2. On définit f par $f(P) = 2XP' - P''$. Etablir que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
3. Montrer que f possède des valeurs propres positives et les déterminer.

Questions du jury

- Donner la définition de l'adjoint d'un endomorphisme, puis montrer qu'en base orthonormée : $Mat_B(u^*) = Mat_B(u)^T$.
- Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique positif (défini positif), d'une matrice symétrique positive (définie positive) et citer la caractérisation spectrale associée.

Exercice 4 (problème des appels téléphoniques). **CCINP 98** [ ]
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que ces appels consituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus à l'issue de ces n appels.

1. Préciser la loi de X.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ corrspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. *On pourra utiliser l'égalité sur les coefficients binomiaux :* $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Donner alors l'espérance et la variance de Z.

Exercice 5 (comportement d'une série entière sur son domaine de convergence). **CCINP 18** [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$. On note alors D l'ensemble des réels x en lesquels la série est convergente.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Etudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Etablir qu'on a convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 6 (condition nécessaire et suffisante de la décomposition en dimension finie). **CCINP 64** [ ]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Démontrer que $E = Im(f) \oplus Ker(f) \Rightarrow Im(f) = Im(f^2)$.
2. (a) Etablir que : $Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$.
   (b) Démontrer alors que :
   $$Im(f) = Im(f^2) \Rightarrow E = Im(f) \oplus Ker(f)$$

Exercice 7 (matrices symétriques positives). **CCINP 66** [ ]

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Prouver que pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Etablir que pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$ et pour tout $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (factorisation en produit de polynômes irréductibles). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Former la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$.
2. En déduire la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n} \sin(\dfrac{k\pi}{n+1})$.

Indications 1. On se plonge dans $\mathbb{C}$, et on résout $P(z) = 0$ en remarquant que 1 n'est pas racine. 2. On a alors $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$. En évaluant astucieusement en 1, on peut faire apparaître le produit de sinus.