Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (intégrabilité d'une somme de série de fonctions). [ ]

On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Justifier que S, la somme de cette série de fonctions, est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Etablir que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$.

Questions du jury

- Citer le critère spécial des séries alternées et donner deux preuves possibles de ce théorème.
- Enoncer le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue. Quel autre théorème peut-on utiliser pour échanger les symboles $\sum$ et $\int$?

Exercice 2 (résolution d'un problème matriciel). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in G$ telle que $tr(M) = n$, montrer que $M = I_n$.

Questions du jury

- Etablir que $tr(M) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de M.
- Rappeler, puis démontrer le petit théorème de Lagrange pour les groupes finis.

Exercice 3 (décomposition polaire). **X/ENS** [ ]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
2. On ne suppose plus que A est inversible.
   Montrer qu'il existe encore un couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

Exercice 4 (recherche d'un équivalent). **X/ENS** [ ]

Pour $\alpha > 1$, déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n\alpha)^k}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!}$$

Exercice 5 (une application du théorème de Césaro). [ ]

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Montrer alors que :
$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
2. On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$.
   Déterminer un équivalent simple de la suite u_n quand $n \to +\infty$.

Indications 1. On travaille par différence et on montre que $|v_n - \ell|$ peut être rendu négligeable à partir d'un certain rang. Autre méthode : on invoque le théorème de sommation des relations de comparaison avec $|u_n - \ell| = o(1)$. 2. On montre d'abord que $u_n \longrightarrow 0$, puis on cherche α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait un équivalent non trivial avant de conclure par Césaro.

Exercice 6 (inégalité de Kolmogorov). [ ]
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes et indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qu'on suppose L^2 et centrées. On fixe de plus $a > 0$ et on pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$S_i = X_1 + \ldots + X_i \text{ et } B_i = (|S_1| < a) \cap \ldots \cap (|S_{i-1}| < a) \cap (|S_i| \geq a)$$

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note 1_{B_i} la fonction indicatrice de l'évènement B_i.
   Justifier que les variables $S_i.1_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes. En déduire que :
   $$\mathbb{E}(S_n^2.1_{B_i}) = \mathbb{E}(S_i^2.1_{B_i}) + \mathbb{E}((S_n - S_i)^2.1_{B_i}) \geq a^2 P(B_i)$$
2. On note $C = (\sup(|S_1|, \dots, |S_n|) \geq a)$. Montrer que $P(C) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$.
3. En déduire l'inégalité de Kolmogorov :
   $$P(\sup(|S_1|, \dots, |S_n|) \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}$$

Indications 1. On remarque que $S_i.1_{B_i}$ ne dépend que des variables aléatoires $X_1, \dots, X_i$ et on invoque le lemme des coalitions. De plus, on a astucieusement $S_n^2 = ((S_n - S_i) + S_i)^2$: on peut multiplier par la fonction indicatrice et appliquer la linéarité de l'espérance, avant d'obtenir la minoration car $S_i^2.1_{B_i} \geq a^2.1_{B_i}$. 2. En fait, $C = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$, et on utilise la σ-additivité. 3. D'après la question 1, on peut donc majorer $P(C) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$...

Exercice 7 (factorisation des polynômes de Legendre). [ ]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième polynôme de Legendre par $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$$
   puis justifier que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1, 1[$.
3. Considérons Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 L_n(t)Q(t)\, dt = 0$.
4. En déduire que (L_n) constitue une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Indications 1. On applique la formule de Leibniz pour trouver une autre expression de L_n. L'égalité suivante provient de l'identification des coefficients dominants. 2. Par récurrence finie et à l'aide du théorème de Rolle, on montre que $\frac{d^k}{dX^k}(X^2-1)^n$ possède au moins k racines dans $]-1, 1[$, et ainsi ce sera vrai au rang n. 3. On met en place des Ipp successives. 4. Les polynômes sont échelonnés, puis on vérifie simplement que $< L_m, L_n >= 0$ pour $n \neq m$.

Exercice 8 (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon). [ ]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On considère le polynôme $P_n = a_0 + a_1 X + \ldots a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ et la matrice compagnon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles.
2. Etablir que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = P_n(\lambda)$.
3. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

Indications 1. Soit $\lambda \in Sp(A)$, on justifie que $rg(A - \lambda.I_n) \geq n - 1$. 2. On peut procéder de différentes façons : en développant suivant la dernière colonne ou par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. 3. Par double implication. Le sens réciproque est immédiat. Dans le sens direct, on revient à la décomposition spectrale et on rappelle le résultat de la question 1.