Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (comparaison logarithmique et règle de Raabe). [ ]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$,
$$u_n \leq C v_n$$
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o(\dfrac{1}{n})$. Montrer que :
$$\begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

On pensera à utiliser une suite $v_n = 1/n^\beta$ avec β bien choisi, avant de se ramener à la question 1.

Questions du jury

- On considère les séries de Bertrand de la forme $\sum 1/n^\alpha \ln^\beta(n)$ avec $\alpha > 0, \beta > 0$. Justifier rapidement le résultat de convergence associé.
- Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=2}^n 1/k\ln(k)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 (contrôle de la déviation). [ ]

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$
2. Notons alors X une variable aléatoire centrée telle que $|X| \leq 1$. Etablir que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tX} est d'espérance finie et qu'on a l'inégalité :
$$E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$$
3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes et centrées qu'on suppose mutuellement indépendantes. On note (c_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|X_n| \leq c_n$ et on définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
Justifier alors que pour tout $\epsilon > 0$:
$$P(|S_n| > \epsilon) \leq 2\exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n c_k^2 - \epsilon)$$

Questions du jury

- On note G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Rappeler le lien avec l'espérance et la variance.
- Citer la loi faible des grands nombres et en donner une démonstration pour une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 3 (théorème de la limite centrée). **X/ENS** [ ]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique. Montrer que :
$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} f(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}\,dx$$

On pourra commencer étudier des fonctions de la forme $f(x) = e^{i\alpha x}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et utiliser l'égalité $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 4 (critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives et application). **X/ENS** [ ]
On rappelle que pour toute matrice $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on peut définir une forme quadratique q_M telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $q_M(X) = X^T M X \geq 0$.

1. Soit $M = (m_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})$. Etablir que M est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux définis par $D_k = det((m_{ij})_{1\leq i,j\leq k})$ sont strictement positifs pour $k \in [\![1, n]\!]$.
2. On donne :
$$M = (\frac{1}{1+|i-j|})_{1\leq i,j\leq n}$$
Montrer que M désigne une matrice symétrique définie positive.

Exercice 5 (une autre preuve de cyclicité de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$). [ ]
Soit p un nombre premier.

1. On note q un nombre premier qui divise $p-1$.
Montrer qu'il existe un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ d'ordre multiplicatif q. *On pourra d'abord travailler sur des classes de la forme* $y_x = x^{(p-1)/q}$.
2. Soit q un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que q^α divise $p-1$. Montrer de la même façon qu'il existe un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ d'ordre multiplicatif q^α.
3. On note $p - 1 = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r}$. Etablir alors que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ désigne un groupe cyclique.

Indications 1. Soit $\overline{x}$ non nul. On a $\overline{y_x}^q = \overline{1}$ par le petit théorème de Fermat et ainsi, l'ordre de $\overline{y_x}$ divise q, c'est à dire $o(\overline{y_x}) \in \{1, q\}$. Par l'absurde, on suppose pour tout $\overline{x}$ non nul $o(\overline{y_x}) = 1$: on en déduit que le polynôme $P(X) = X^{(p-1)/q} - \overline{1}$ possède $p-1$ racines, c'est impossible en raison de son degré. Il existe finalement $\overline{x}$ non nul tel que $\overline{y_x}$ soit bien d'ordre q. 2. De la même façon, on pose $y_x = x^{(p-1)/q^\alpha}$ et on a encore $o(\overline{y_x})|q^\alpha$, c'est à dire de la forme q^{r_x} avec $r_x \leq \alpha$. On note r le plus grand de ces ordres, et on peut vérifier que toutes les classes non nulles sont racines de $Q(X) = X^{(p-1)/q^{\alpha-r}} - 1$: son degré est supérieur ou égal à $p-1$ et aussi inférieur à $p-1$... d'où, $(p-1)/q^{\alpha-r} = p-1$, ce qui livre $\alpha = r$ et il existe bien un élément d'ordre q^α. 3. On rappelle que dans un groupe commutatif, l'ordre de deux éléments dont les ordres sont premiers entre eux, est le produit des deux ordres. D'après la question précédente, il existe $\overline{x_i}$ d'ordre $q_i^{\alpha_i}$ de sorte que $\overline{x_1} \dots \overline{x_r}$ désigne un élément d'ordre $p - 1 = card(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$. On en déduit la cyclicité attendue.

Exercice 6 (une preuve de Cayley-Hamilton par un théorème d'interversion $\sum / \int$). [ ]
On note $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que :
$$A^{k-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^k (re^{it}I_n - A)^{-1}\, dt$$
2. On pose $\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Etablir alors que $\chi_A(A) = 0$.

Indications 1. On introduit une norme d'algèbre et on considère $r > \|A\|$ de sorte que : $(re^{it}I_n - A)^{-1} = r^{-1}e^{-it}(I_n - r^{-1}e^{-it}A)^{-1}$. En utilisant la formule d'Adrien, on peut alors exprimer l'inverse d'une telle matrice comme la somme d'une série géométrique en A. On justifie que la série converge normalement sur $[0, 2\pi]$ avant d'échanger les symboles $\sum / \int$ dans l'intégrale donné... le calcul nous donne $2\pi A^{k-1}$. 2. Avec $\chi_A(X) = a_0 + \dots + X^n$, on écrit $\chi_A(A)$ sour forme intégrale. D'ailleurs, on pourra reconnaître une formule usuelle dans l'intégrale : $\chi_A(z)(zI_n - A)^{-1} = Com(zI_n - A)^T$, mais on intègre alors des polynômes trigonométriques en e^{it} dont l'intégrale est nulle sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 7 (dualité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et hyperplans). [ ]
Soit $n \geq 2$ et notons H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Pour $r \geq 1$, on note $Jr = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et Y la matrice de permutation définie par :
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer que $tr(J_rY) = 0$.
2. Etablir alors que $H \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas vide. Autrement dit, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Indications 1. Il s'agit d'un simple calcul des coefficients diagonaux pour avoir $tr(J_rY) = 0$. 2. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il désigne alors le noyau d'une forme linéaire non nulle f et par dualité (ou théorème de représentation de Riesz), il existe une unique matrice A telle que

$f(X) = tr(AX)$. Reste à trouver X inversible tel que $f(X) = 0$. Pour cela, on note $rg(A) = r$ de sorte que $f(X) = tr(PJ_rQX) = tr(JrQXP)$... et en posant $X = Q^{-1}YP^{-1}$, on justifie soigneusement que X convient.

Exercice 8 (série entière et marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$). [ ]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p, \text{ avec } p \in [0, 1]$$

On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et ainsi la suite (S_n) représente une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ de sorte que S_n représente l'abscisse d'un point mobile au bout de n déplacements.

1. (a) Déterminer $u_n = P(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On discutera suivant la parité de n.*

   (b) On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum u_n x^n$. Etablir que pour tout $x \in]-1, 1[$,

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k =$ "le point mobile revient en 0 pour la première fois au bout de k déplacements", c'est à dire:

   $$A_k = (S_k = 0) \cap \left(\cap_{i=1}^{k-1} (S_i \neq 0) \right)$$

   On pose alors $v_k = P(A_k)$ avec $v_0 = 0$.

   (a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P((S_n = 0) \cap A_k)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$.

3. On note $g(x)$ la somme de la série entière $\sum v_n x^n$ et R son rayon de convergence.

   (a) Justifier que $R \geq 1$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \dfrac{f(x) - 1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}$.

   (b) On considère enfin l'évènement $A =$ "il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 0$". En discutant suivant les valeurs de p, déterminer la probabilité que le point repasse par l'origine.

Indications C'est un exercice qu'on a fait dans l'année... il ne devrait pas vous poser de grandes difficultés !