Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (norme subordonnée de la trace). [ ]

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$N(A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

1. Etablir que N désigne bien une norme sur E, puis prouver que pour tout $(A, B) \in E^2$, $N(AB) \leq N(A).N(B)$.
2. Montrer alors que l'application $tr : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et déterminer sa norme $|||tr|||$.

Questions du jury

- Rappeler la définition des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, puis montrer qu'elles sont équivalentes.
- On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie. Justifier que f est nécessairement continue.

Exercice 2 (calcul explicite des intégrales de Wallis). [ ]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\, dt$$

1. Montrer que J est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que J est solution de l'équation $(\mathcal{E})$: $xy'' + y' + xy = 0$.
2. Etablir que J peut s'écrire sous la forme d'un développement en série entière définie sur $\mathbb{R}$. *On pourra introduire (W_n) la suite des intégrales de Wallis.*
3. Déterminer les solutions développables en série entière de $(\mathcal{E})$, puis en comparant les résultats obtenus, donner l'expression des intégrales de Wallis W_{2n}.

Questions du jury

- Citer la formule de Stirling.
- Rappeler un équivalent de W_n quand $n \to +\infty$, puis justifier de deux façons que $W_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 (limite des puissances d'une matrice diagonalisable). [ ]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la suite (A_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{n} \\ \dfrac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la limite de la suite (A_n^n) quand $n \to +\infty$.

Questions du jury

- Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Justifier que $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si $a_n \longrightarrow Re(\ell)$ et $b_n \longrightarrow Im(\ell)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Rappeler l'expression de χ_A, puis justifier rapidement que A est nilpotente si et seulement $tr(A) = det(A) = 0$.

Exercice 4 (limite d'une espérance). **CCINP 104** [ ]

Soit $n \geq 3$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotées de 1 à 3. On lance simultanément les n bules qi viennent se ranger aléatoirement dans les trois compartiments. Chaque compartiment peut contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$, puis déterminer la loi de X.
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$ et interpréter votre résultat.

Exercice 5 (décomposition de E). **CCINP 62** [ ]

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on note $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2id = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Etablir que $E = Ker(f + id) \oplus Ker(f - 2id)$ de deux façons :
   - en utilisant le lemme des noyaux,
   - sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimenion finie. Montrer alors que $Im(f + id) = Ker(f - 2id)$.

Exercice 6 (développement en série entière). **CCINP 51** [ ]

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{n!^2.2^{4n}.(2n+1)}$ converge.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto 1/\sqrt{1-t}$ en précisant le domaine de convergence.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction arcsin ainsi que son rayon de convergence.
4. Retrouver alors la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{n!^2.2^{4n}.(2n+1)}$.

Exercice 7 (étude d'une fonction de classe C^1). **CCINP 33** [ ]

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0\}$,

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 (différentiabilité du déterminant). [ ]

On se place dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et on considère l'application $det : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$det : M \longmapsto det(M)$$

1. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Justifier que pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $det(M) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+j} \Delta_{kj} m_{kj}$, où Δ_{kj} est le mineur associé.
2. Déterminer $D_{i,j}det(M)$ la dérivée partielle d'indice (i, j) du déterminant au point M, c'est à dire la dérivée en M suivant la matrice élémentaire E_{ij}.
3. Montrer alors que l'application det est différentiable sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que pour tout $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

$$d\,det_M(H) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} H_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} = tr(C(M)^T H)$$

Indications 1. On reconnaît ici la formule de développement du déterminant suivant C_j. 2. On dérive l'expression précédente en suivant la direction E_{ij}. 3. On peut justifier la différentiabilité car le déterminant est polynomial en les coefficients de M, puis on revient à l'expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.