## Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

**Exercice 1** (loi de Bernoulli et matrices aléatoires). [ ]

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p$. On pose :

$$D = diag(X_1, \dots, X_n) \text{ et } M = PDP^{-1} \text{ où } P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

1. Donner les lois et espérances des variables $tr(M), det(M)$ et $rg(M)$.
2. Déterminer la probabilité que les sous-espaces propres de $M$ soient de même dimension. *On raisonnera sur la parité de $n$.*
3. On considère le vecteur colonne $U = (X_1, \dots, X_n)^T$ et on note $A = UU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la loi des coefficients de $A$, de $tr(A)$ et $rg(A)$.

**Questions du jury**

- Soit $p$ un projecteur d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Justifier que $rg(p) = tr(p)$.
- Rappeler la caractérisation des matrices de rang $r$, puis montrer que $rg(AB) \leq min(rg(A), rg(B))$.

**Exercice 2** (deux expressions intégrales de la constante d'Euler). [ ]

On considère la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ et on note $H_n$ la $n$-ième somme partielle de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in [0, 1]$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, puis établir que :
$$\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{t} \, dt > 0$$
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \longmapsto \begin{cases} (1 - \dfrac{t}{n})^n \text{ , si } 0 < t \leq n \\ 0 \text{ , si } t > n \end{cases}$.
   (a) Déterminer la limite de $(f_n)$ quand $n \to +\infty$.
   (b) En déduire alors la valeur de $\Gamma'(1)$.

**Questions du jury**

- On note encore $\Gamma$ la fonction gamma d'Euler. Justifier que $\Gamma(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \to +\infty$, puis établir qu'au voisinage de l'infini, on a pour tout $a > 0$, $a^x = \circ(\Gamma(x))$.
- Rappeler la définition de la log-convexité, puis montrer que $\Gamma$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra procéder de deux façons.

**Exercice 3** (commutant d'une matrice diagonalisable). **X/ENS** [ ]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A$ est diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A$ et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

On définit le commutant de $A$ par :

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$$

et on rappelle que $\mathbb{K}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer qu'on a $dim(\mathbb{K}[A]) = r$ et $dim(C(A)) = n_1^2 + \ldots + n_r^2$.
2. Justifier que $\mathbb{K}[A] \subset C(A)$, puis établir les équivalences suivantes :
$$dim(C(A)) = n \Leftrightarrow dim(\mathbb{K}[A]) = n \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow C(A) = \mathbb{K}[A]$$

**Exercice 4** (une autre preuve de d'Alembert-Gauss). **X/ENS** [ ]

On considère $f$ une fonction $2\pi$-périodique et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si de plus, $f$ ne s'annule pas, on définit la **fonction indice** par :

$$I(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt$$

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \exp(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt)$. Montrer que $\psi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, puis justifier que $\psi$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. Etablir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\psi = \lambda f$. En déduire $\psi$ est $2\pi$-périodique et que nécessairement $I(f) \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on suppose de degré $n \geq 1$. Montrer alors que $P$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
*On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction $f_r : t \longmapsto P(re^{it})$ pour tout $r \geq 0$ et définir une intégrale à paramètre en posant $F(r) = I(f_r)$.*

**Exercice 5** (autour des groupes finis). [ ]

1. (a) Soit $G$ un groupe fini tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$. Montrer que $G$ est nécessairement abélien et que $Card(G)$ est une puissance de 2.
   (b) On note $p$ un nombre premier tel que $p \geq 3$. Montrer alors que tout groupe $G$ de cardinal $2p$ possède au moins un élément d'ordre $p$.
2. On suppose désomais que $G$ désigne groupe fini tel que $Card(G) = 4$. Etablir que $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Indications** 1.a) L'hypothèse nous donne que pour tout $x \in G$, $x = x^{-1}$ et donc, $xy = (xy)^{-1} = \ldots = yx$. On procède alors par récurrence sur $n = Card(G)$. Pour $n = 1$, c'est immédiat. Si $n \geq 2$, on introduit $H$ un sous-groupe distinct de $G$ satisfaisant la même condition et de cardinal maximal et en notant $a \in G\backslash H$, on montre par maximalité que nécessairement $G = H \sqcup aH$ de cardinal $2Card(H)$ et donc, c'est encore une puissance de 2. 1.b) D'après le théorème de Lagrange, les éléments de $G$ sont d'ordre $1, 2, p$ ou $2p$. Par l'absurde, on suppose qu'il n'y a pas d'éléments d'ordre $p$ : on en déduit que pour tout $x$, on a $x^2 = 1$ et par suite, $Card(G)$ est une puissance de 2. CONTRADICTION avec $p$ premier et $p \geq 3$. 2. On discute les cas : si $G$ possède un élément d'ordre 4, alors il est cyclique et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Sinon, par le théorème de Lagrange, les éléments de $G$ à l'exception du neutre sont tous d'ordre 2 : d'après 1, $G$ est abélien et on peut construire à la main un isomorphisme de groupes de $G$ sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

**Exercice 6** (un exemple de calcul d'intégrales jumelles). [ ]

On considère une fonction $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'on a l'égalité :
$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin(x))\, dx = \int_0^{\pi} xf(\sin(x))\, dx$$
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, le calcul de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n}(x)}{\cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x)}\, dx$.

**Indications** 1. Dans un premier temps, on pose $t = \pi/2 - x$ afin de transformer $\int_0^{\pi} xf(\sin(x))\, dx$ : on obtient deux intégrales dont l'une est nulle par imparité puis, on repose $t = \pi/2 - x$ pour se ramener en sinus. 2. D'après 1, on est ramené à l'intégrale d'une fonction rationnelle en cos et sin. Par $\pi$-périodicité, on peut écrire l'intégrale sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et on introduit son intégrale jumelle pour pouvoir travailler avec les deux intégrales jumelles.

**Exercice 7** (série des inverses des nombres premiers). [ ]

On pose $p_1 = 2$ et on note plus généralement $p_n$ le $n$-ième nombre premier. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ est divergente.

**Indications** Comme $p_n \longrightarrow +\infty$, on rappelle que les séries de terme général $1/p_n$ et $-\ln(1 - 1/p_n)$ sont de même nature. Par l'absurde si la série $\sum 1/p_n$ converge, alors on pourra majorer, à cran fini, les somme partielles $\sum_{k=1}^{N} \ln(1/(1 - 1/p_k)) = \ln(\prod_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{+\infty} 1/p_k^i)$. Malheureusement, en choisissant de travailler avec $N = p_n$, on peut montrer qu'on majore ainsi $H_{p_n} \sim \ln(p_n) \longrightarrow +\infty$.

**Exercice 8** (étude de deux suites trigonométriques classsiques). [ ]

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{cases} u_{n+1} - u_{n-1} = -2v_n \sin(\theta) \\ v_{n+1} - v_{n-1} = 2u_n \sin(\theta) \end{cases}$$
2. (a) On se place dans le cas où $\sin(\theta) \neq 0$. Montrer que $(u_n)$ est nécessairement divergente.
   (b) On se place dans le cas où $\sin(\theta) \neq 0$. Montrer de la même façon que $(v_n)$ est nécessairement divergente.
3. On se place dans le cas où $\sin(\theta) = 0$, c'est à dire $\theta \in \{2k\pi, (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Que pouvez-vous dire de la nature des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ?

*On retrouve en particulier le résultat qu'on a évoqué pendant la préparation : avec* $\theta = 1\ [2\pi]$, $(\cos(n))$ *et* $(\sin(n))$ *sont divergentes.*

**Indications** 1. On exploite simplement les formules trigonométriques. 2.a) et b) Par l'absurde, si par exemple $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$, alors on obtient de la question 1 : $v_n \longrightarrow 0$, puis dans la seconde ligne, $\ell = 0$ mais $u_n^2 + v_n^2 = 1$, ce qui livre par passage à la limite $0 = 1$. CONTRADICTION. 3. Par $2\pi$-périodicité, on peut simplifier les calculs et obtenir rapidement le comportement asymptotique des deux suites dans ces cas particuliers.