Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (un peu d'arithmétique avec la fonction ζ). [ ]

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on rappelle que pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
On considère alors X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n = "n divise X". Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ désigne une famille d'évènements mutuellement indépendants.
3. En déduire que $\prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^s}) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Questions du jury

- Rappeler le théorème de convergence relatif aux séries de Riemann, puis en donner une preuve rapidement.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b désignent deux entiers premiers entre eux, justifier que : $a|n$ et $b|n \Leftrightarrow ab|n$.

Exercice 2 (factorisation d'une matrice symétrique positive). [ ]

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S = A^T A \in S_n(\mathbb{R})$ et que les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
2. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2$.
3. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$ si et seulement si les valeurs propres de S sont toutes positives ou nulles.
Cette hypothèse étant vérifiée, donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible.

Questions du jury

- Rappeler le téhorème spectral pour une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ et justifier que $Sp(S) \subset \mathbb{R}$.
- On suppose que S est symétrique réelle et nilpotente. Etablir que $S = 0$.

Exercice 3 (méthode de variations des constantes). [ ]

Trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$(E)\quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-t^2}}$$

Questions du jury

- On considère l'équation différentielle : $(\mathcal{E})\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ où a, b sont continues sur $\mathbb{R}$. Retrouver la forme des solutions sous forme intégrale.
- On se place dans le cas particulier où $a(t) = \alpha > 0$. Montrer que si f_1, f_2 sont des solutions bornées de $(\mathcal{E})$, alors nécessairement $f_1 = f_2$.

Exercice 4 (caractérisation de la continuité). **CCINP 56** [ ]

Soit E l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

1. Etablir que E désigne un soues-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. On pose pour tout $u \in E$, $\|u\| = \sup |u_n|$.
   (a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.
   (b) Soit $u \in E$. Prouver que $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On définit alors $f : u \in E \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. Montrer que f désigne une forme linéaire continue sur E.

Exercice 5 (termes généraux équivalents de séries à termes positifs). **CCINP 7** [ ]

1. Soient (u_n) et (v_n) deux séries de nombres réels positifs. On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que :
$$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin(1/n)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Exercice 6 (échange limite et intégrale). **CCINP 27** [ ]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2} \text{ et } u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions $f(_n)$ converge t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. Converge t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 (notion d'adhérence). **CCINP 44** [ ]

Soit E un espace vectoriel normé et considérons A, B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra se placer dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (convergence en moyenne des puissances d'une matrice orthogonale). [ ]

1. On rappelle que $\mathcal{O}_p(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R}),\ M^T = M^{-1}\}$.
   (a) Retrouver rapidement la forme des matrices qui constituent $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer plus généralement que $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$, puis justifier qu'il s'agit d'une partie compacte de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k$$
   (a) Justifier que $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R}) = Ker(M - I_p) \overset{\perp}{\oplus} Im(M - I_p)$.
   (b) En déduire que (A_n) converge vers la matrice de la projection orthogonale sur $Ker(M - I_p)$.

Indications 1.a) On a $M^TM = I_2$ et on revient aux coefficients. 1.b) On utilise la caractérisation des sous-groupes de $(\mathcal{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$. De plus, en dimension finie, on peut montrer que $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ est fermé et borné. 2.a) On montre d'abord que les sous-espaces sont orthogonaux : avec $(X,Y) \in Ker(M-I_p) \times Im(M-I_p)$, on a $X^TY = 0$... l'intersection est donc réduite à 0 et la formule du rang nous permet de conclure. 2.b) Soit $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$, on utilise la décomposition de sorte que $A_nX = A_nX_1 + A_nX_2$, puis on étudie le comportement asymptotique de chacun des termes afin de montrer que $A_nX \longrightarrow X_1$.