Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (limite d'une série vectorielle). ▶ **Centrale 2** [ ]

On considère la matrice A définie par :

$$A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Dans le langage Python, construire la fonction $somme(n : int) \longrightarrow array$ qui, pour tout entier naturel n non nul, renvoie la valeur de la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k$.
   Quel est le comportement asymptotique de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k$?
   (b) En notant S la limite éventuelle de cette série, quelle hypothèse peut-on faire sur la forme de $\exp(S)$?

Plus généralement, on considère $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a \in [0,1[$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \leq a X^T X$$

3. Montrer que, sous ces conditions, la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} A^k$ converge vers une limite S symétrique.
4. Prouver alors le résultat obtenu à la question 2.

Exercice 2 (étude d'une suite d'intégrales). [ ]

Fixons $a > 0$ et considérons une fonction f continue sur $[0, a]$, décroissante et à valeurs réelles strictement positives telles que $f(0) = 1$. On suppose de plus que f est dérivable à droite en 0 avec $f'(0) = -1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^a (f(t))^n \, dt$$

Déterminer la limite de la suite (I_n), ainsi qu'un équivalent quand $n \to +\infty$.

Questions du jury

- Citer le théorème de changement de variables pour les intégrales généralisées. Justifier alors que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\, dx$ est bien convergente, puis déterminer sa valeur.
- Rappeler la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I, puis démontrer l'inégalité de Jensen.

Exercice 3 (matrice des covariances). [ ]

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \in L^2$. On note pour $k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = X_1 + \ldots + X_k$ et on définit $M = (cov(Y_i, Y_j))$ la matrice des covariances des Y_k.

1. Justifier que M est diagonalisable et que $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Simplifier les coefficients de M, puis exprimer M en fonction de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$.
3. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{V}(X_k) = 1$. Donner un encadrement de $\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} t_k Y_k)$ en fonction des valeurs propres extrémales de A et des réels t_k.

Questions du jury

- On note $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Etablir que $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(X_i, X_j)$.
- Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ désignent des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$. Justifier que $X_1 + \ldots + X_n$ suit encore une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 4 (exponentielle de matrices antisymétriques réelles). **X/ENS** [ ]

On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétiques de taille n. Montrer que l'application :

$$\exp : A_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$$

est bien définie et qu'elle désigne une application surjective.

Exercice 5 (exposant d'un groupe abélien fini). **X/ENS** [ ]

Soit G un groupe multiplicatif qu'on suppose abélien et fini. Pour tout $x \in G$, on note $o(x)$ l'ordre de x.

1. Soit $(x, y) \in G^2$ et on pose $m = o(x), n = o(y)$.
   (a) On suppose que m et n sont premiers entre eux. Etablir que $o(xy) = mn$.
   (b) Si m et n ne sont pas premiers entre eux, a t-on $o(xy) = ppcm(m, n)$?
2. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe deux entiers m' et n' tels que : $\begin{cases} m'|m \text{ et } n'|n \\ pgcd(m', n') = 1 \\ ppcm(m, n) = m'n' \end{cases}$.
3. On considère $z \in G$ d'ordre maximal m. Montrer que m désigne le ppcm des ordres des éléments de G. On retiendra qu'il existe un élément d'ordre maximal m, appelé aussi **exposant du groupe** G, qui n'est rien d'autres que le ppcm des ordres.
4. (a) Soient K un corps commutatif et G un sous-groupe fini du groupe des éléments inversibles $U(K) = K^*$. Etablir alors que G est nécessairement cyclique.
   (b) En déduire que pour tout nombre premier p, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe cyclique.

Indications 1.a) On justifie d'abord que $(xy)^{mn} = 1$, puis on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $(xy)^k = 1$, alors $mn|k$. Autrement dit, c'est bien la plus petite puissance qui permet de toucher le neutre. 1.b) On prend $y = x^{-1}$ et ainsi, $o(xy) = 1$. 2. On écrit la décomposition de m et n en produit de nombres premiers, et on choisit m' et n' à partir de ces facteurs en jouant sur les valuations. 3. Soit x un autre élément de G d'ordre n, on introduit m', n' et on regarde le produit $z^{m/m'}x^{n/n'}$: c'est un élément de G d'ordre $m'n' = ppcm(m, n)$ et donc, inférieur à m choisi maximal. D'où, $ppcm(m, n) = m$ et ainsi, m est bien multiple de chacun des ordres des éléments de G. 4.a) On note m l'exposant du groupe G, et étant le ppcm de tous les ordres, alors pour tout $x \in G$, x est racine du polynôme $X^m - 1$ qui possède un nombre fini de racines, d'où $n = card(G) \leq m$. Or en notant z l'élément d'ordre maximal m, on a par le théorème de Lagrange : $m|n$, et donc $m \leq n$. Finalement, z est d'ordre $m = n$ et ainsi, $G =< z >$. 4.b) C'est immédiat, puisque $p \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ désigne un corps commutatif à p éléments.

Exercice 6 (méthode de quadrature de Gauss). [ ]

On pose pour tout $n \geq 1$, $L_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\, dx = 0$.
2. Etablir que L_n admet n racines simples $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ dans l'intervalle $]-1, 1[$.
3. Montrer alors qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i)$$

Indications 1. On réalise des Ipp successives afin d'abaissser le degré de Q... et on n'oubliera pas de rappeler que ± 1 sont racines multiples d'ordre n pour simplifier les crochets. 2. C'est une question classique qui a déjà été traitée : on note $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et par récurrence, on montre que $P_n^{(k)}$ possède au moins k racines sur $]-1, 1[$. On conclut alors avec le degré de $L_n = P_n^{(n)}$. 3. Si on effectue la division euclidienne par L_n, on obtient facilement : $\int_{-1}^{1} Q = \int_{-1}^{1} R$, mais l'application $\phi : P \longmapsto \int_{-1}^{1} P$ peut être vue comme une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. L'espace dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$ est de dimension n et les applications $\phi_i : P \longmapsto P(x_i)$ en désignent une base, ce qui nous permettra de relier $\int_{-1}^{1} Q$ à $R(x_i) = Q(x_i)$.

Exercice 7 (la norme-p est une norme sur $\mathbb{K}^n$). [ ]

Soient p, q deux réels tels que $p > 1, q > 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On définit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} \text{ et } \|x\|_q = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q)^{1/q}$$

1. Prouver que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ (inégalité de Young).
2. Etablir que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \times \|x\|_q$ (inégalité de Hölder).
3. Montrer alors que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$, puis justifier en particulier que $\|.\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|.\|_\infty$.

Indications 1. Le cas où a ou b nul est immédiat. Sinon, on peut prendre le logarithme du membre de droite et invoquer la concavité. 2. Encore une fois, si x ou y nul, c'est immédiat. Sinon, on applique l'inégalité de Young avec $a = |x_k|/\|x\|_p$ et $b = |y_k|/\|y\|_q$. En sommant les inégalités, on retrouve alors l'inégalité de Hölder. 3. On revient à la définition d'une norme. Seule l'inégalité triangulaire est délicate : pour cela, on travaille à la puissance p, et on décompose le terme général avant majoration : $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1}|x_k + y_k| \leq |x_k + y_k|^{p-1}|x_k| + |x_k + y_k|^{p-1}|y_k|$. On applique enfin l'inégalité de Hölder à chaque somme et les réels p, q étant associés, on peut retrouver la majoration souhaitée... Pour la dernière limite, on peut noter k_0 un indice qui atteint le maximum des $|x_k|$ et factoriser avant le passage à la limite.

Exercice 8 (régularité d'une somme). [ ]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \longmapsto \dfrac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la somme S est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable en 0. En déduire que la converge de la série $\sum f_n'$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Indications 1. A x fixé, on peut dominer $|f_n(x)|$ par une série de Riemann convergente. De plus, cette majoration est indépendante de x, ce qui nous livre la convergence normale sur $\mathbb{R}$. 2. A x fixé, $f_n'(x)$ est le terme général d'une série produit de la forme $a_n b_n$: on peut alors invoquer les résultats de convergence liés à la transformation d'Abel... 3. On écrit le taux d'accroissement en 0, puis, la somme obtenue étant négative, on peut la majorer par la somme sur les seuls entiers n tels que $nx/2 \leq \pi/2$. Comme $\sin(X) \geq 2X/\pi$ sur $[0, \pi/2]$, on peut aller chercher un majorant de sorte qu'en $x = \pi/p$, on a une somme finie qui "pousse" le taux d'accroissement vers $-\infty$. Pour finir, la CU nous donnerait le critère C^1... ce qui est contradictoire avec la non dérivabilité en 0.