Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (échange des symboles $\sum$ et $\int$). [ ]

On considère l'intégrale définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\, dt$$

et on rappelle que pour tout $x > 1$, on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de I_p, puis montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = p!\zeta(p+1)$.

Questions du jury

- On note I un intervalle centré en 0. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit DSE sur I. De la même façon, donner une condition suffisante portant sur les dérivées successives de f pour que f soit DSE sur I.
- On note pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$. Justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Préciser alors la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Exercice 2 (utilisation de la réduction simultanée). [ ]

On considère $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qu'on suppose nilpotente telle que $AN = NA$. Montrer alors que :

$$\det(A+N) = \det(A)$$

Questions du jury

- On considère M, N deux matrices nilpotentes telles que $MN = NM$. Justifier que NM et $N+M$ sont encore nilpotentes.
- On suppose que f, g désignent deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel de dimension finie et tels que $f \circ g = g \circ f$, expliquer rapidement pourquoi ils sont codiagonalisables.

Exercice 3 (la transformation d'Abel). [ ]

Soit $p \in]0,1[$. On considère la série $\sum a_n b_n$, où (a_n) désigne une suite à valeurs réelles et (b_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k,\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$.
2. On se place dans le cas particulier où : $\begin{cases} \text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante de limite nulle} \\ \text{la suite } (B_n) \text{ est bornée} \end{cases}$.
   Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.
3. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Questions du jury

- En utilisant une telle transformation, redémontrer le critère spécial des séries alternées.
- Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite (u_n) a la même nature que la série télescopique $\sum u_n - u_{n-1}$.

Exercice 4 (endomorphisme qui commute avec son adjoint). **CCINP 63** [ ]

Soit E un espace euclidien et pour tout endomorphisme u de E, on note u^* son adjoint.

1. Un endomorphisme u vérifiant pour tout $x \in E$, $< u(x), x >= 0$, est-il forcément l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $u \circ u^* = u^* \circ u$
   (ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), u(y) >=< u^*(x), u^*(y) >$
   (iii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_2 = \|u^*(x)\|_2$

Exercice 5 (loi conjointe et lois marginales). **CCINP 111** [ ]

On suppose que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

On considère deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on définit la loi du couple (X, Y) par :

$$P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}(1/2)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi de Y, et justifier que $1+Y$ suit une loi géométrique.
3. En déduire l'espérance de Y.
4. Déterminer la loi de X.

Exercice 6 (étude des extremas sur un compact). **CCINP 56** [ ]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$$

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Admet-elle des extremas locaux ?
2. La fonction f admet-elle des extremas globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On note $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Etablir que f admet un maximum global sur K, puis le déterminer.

Exercice 7 (limite d'une suite d'intégrales définies sur un segment). **CCINP 10** [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer alors la limite :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\, dx$$

Exercice 8 (continuité des applications comatrice et inverse). [ ]

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?
2. Justifier rapidement que l'application $M \longmapsto M^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. On note $C(A)$ la comatrice d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier qu'on a pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:
$$C(AB)^T = C(B)^T.C(A)^T$$

Indications 1. On peut voir $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'un ouvert par l'application det continue en tant qu'application polynomiale en les coefficients de M. 2. On écrit M^{-1} à l'aide de la comatrice et on justifie proprement que tout est constitué d'applications continues. 3. On montre le résultat pour des matrices inversibles, puis on étend celui-ci sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par densité des matrices inversibles.