Planche de préparation pour les oraux

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de MPSI et MP,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.

Exercice 1 (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On considère le polynôme $P_n = a_0 + a_1 X + \dots a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ et la matrice compagnon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles.
2. Etablir que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = P_n(\lambda)$.
3. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

Questions du jury

- Citer le lemme des noyaux. Justifier alors comment celui-ci nous donne une décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces stables par f.
- Rappeler la formule de développement suivant une ligne ou une colonne. Pour quelle autre utilisation peut-on avoir besoin de calculer des mineurs Δ_{ij} ?

Exercice 2 (espérance d'une variable aléatoire). [ ]

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. Un immeuble est constitué d'un rez de chaussée et de n étages numérotés de 1 à n. N personnes montent dans l'ascenceuur au rez de chaussée et chacun appuie au hasard sur un bouton entre 1 et n, et ceci indépendamment du choix des autres personnes. Puis, l'ascenceur commence son ascension et s'arrête aux étages demandés.
On note X le nombre d'arrêts de l'ascenceur et pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la variable de Bernoulli valant 1 si au moins une personne a appuyé sur le bouton i.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de X_i.
2. En déduire l'espérance de X en fonction de n et N.
3. Pour N fixé, déterminer la limite de $E(X)$ quand $n \to +\infty$.

Questions du jury

- Quelle est la définition de l'espérance ? Est-elle toujours définie ? Rappeler l'espérance d'une loi binomiale, d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson, puis expliquer comment retrouver ces résultats.
- Donner une condition suffisante pour que l'espérance et la variance existent.

Exercice 3 (projeté orthogonal). [ ]

On travaille dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on définit f telle que pour tout $A, B \in E$, $f(A, B) = tr(A^T B)$.

1. Montrer que f définit un produit scalaire sur E.
2. On note $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_3, B) est une famille orthogonale.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $Vect(I_3, B)$.

Questions du jury

- Donner d'autres produits scalaires usuels sur des espaces vectoriels de votre choix.
- On note F un sev d'un espace euclidien E et on note (e_i) une base orthonormée de F. Etablir que $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$.

Exercice 4 (utilisation du critère spécial des séries alternées). **CCINP 8** [ ]

1. Soit (u_n) une suite décroissante et de limite nulle.
   Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente et donner une majoration du reste partiel.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (a) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.

   (b) Montrer que la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 (normes non équivalentes). **CCINP 37** [ ]

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$,

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

1. (a) Montrer que N_∞ et N_1 sont des normes sur E.

   (b) Démontrer qu'il existe $k >$ tel que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

2. Démontrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6 (équation différentielle du second ordre). **CCINP 31** [ ]

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4(x)$. *On commencera par linéariser l'expression.*

2. En déduire les solutions réelles de l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = \cos^3(x)$.

Exercice 7 (interpolation en des points donnés). **CCINP 87** [ ]

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \ldots, b_n$ désignent $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ vérifiant :
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter ce polynôme L_k lorsque pour tout i, $b_i = \delta_{ik}$.

3. Prouver alors que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 8 (étude d'une suite d'intégrales). [ ]

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan^n(t)\, dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n + u_{n+2}$, puis que $u_n \longrightarrow 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} u_{2n+2}$$
   En déduire la limite de $\sum_{k=0}^n \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ quand $n \to +\infty$.

3. Donner alors le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.

Indications 1. En factorisant par $\tan^n(t)$ dans l'intégrale, on reconnaît presque la dérivée de $\tan^{n+1}(t)$. Pour la limite, on peut ou bien faire appel au théorème de la limite monotone et exploiter le résultat précédent, ou bien invoquer le TCD sur $[0, \pi/4[$. 2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avant de faire tendre $n \to +\infty$. 3. Par monotonie de (u_n), on peut obtenir l'encadrement : $1/2(n+1) \leq u_n \leq 1/(n+1)$ et récupérer le rayon de convergence par comparaison à des séries entières usuelles.