

Exercice 1 (une application du théorème de Césaro).

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ . Montrer alors que :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

2. On définit alors la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 \in]0, \pi/2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$.

Déterminer un équivalent simple de la suite u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Donner alors un développement asymptotique de la suite à deux termes.

Remarque La notion de développement asymptotique prolonge naturellement celle des développements limités, puisqu'on cherche à décrire le comportement de la suite au voisinage de l'infini. Mais l'exercice est plus difficile car on ignore avec quelle précision travailler.