Exercice 1 (suites des noyaux et des images itérées et application à la décomposition de Fitting). **X/ENS** [ ]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que les suites $(Im(u^k))$ et $(Ker(u^k))$ sont strictement monotones pour l'inclusion et constantes à partir d'un même rang p.
2. Etablir que la suite $(Ker(u^k))$ "s'essoufle", c'est à dire que la suite des différences $(dim(Ker(u^{k+1})) - dim(Ker(u^k)))$ est dércoissante.
3. Montrer qu'on a $E = Ker(u^p) \oplus Im(u^p)$.
4. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & O \\ O & C \end{pmatrix}$, où N est une matrice carrée nilpotente, C une matrice inversible.

Remarque *Cet exercice est assez classique, car il met en avant tout l'intérêt d'étudier les suites des noyaux itérés et des images itérées, mais il permet aussi de voir un nouvel exemple de similitude en choisissant une base adaptée à la décomposition obtenue.*