Exercice 1 (calcul du rayon de convergence). [ ]

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{n^2+1}{n^3+2} z^n$
2. $\sum (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) z^n$
3. $\sum \dfrac{2^n+n^2}{3^n-n^2} z^n$
4. $\sum \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+1)} z^n$
5. $\sum \binom{2n}{n} z^n$
6. $\sum e^{\sin(n)} z^n$
7. $\sum \tan(\pi\sqrt{n^2+1}z^n)$
8. $\sum a_n z^n$, où a_n désigne la n-ième décimale de $\sqrt{2}$

Exercice 2 (calcul du rayon de convergence). **CCINP 20** [ ]

1. Donner la définition du rayon de convergence pour une série entière complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$
   (c) $\sum \cos(n) z^n$

Exercice 3 (calcul du rayon de convergence). **CCINP 21** [ ]

Soit (a_n) une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge.

1. Quel est alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?
2. Caculer le rayon de convergence de la série $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}) z^n$?

Exercice 4 (relation entre les rayons de convergence). ★★★ [ ]

On considère la série entière $\sum a_n z^n$ et on note R son rayon de convergence.

1. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.
2. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 5 (développement en série entière à l'aide d'une décomposition en éléments simples). **CCINP 2** [ ]

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléménts simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle ouvert de convergence qu'on précisera. Donner alors les coefficients de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et on note g sa somme sur $]-R, R[$. Exprimer pour tout entier p le coefficient a_p du développement, puis prouver-le.
   (b) Préciser alors le développement limité de f en 0.

Exercice 6 (du bon usage du produit de Cauchy). ★★★ [ ]

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \frac{z^n}{n!}$$

Exercice 7 (calcul du rayon de convergence). [ ]

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+n)}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n existe, puis établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}(H_{2n-1} - H_{n-1})$$
avec la convention $H_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
2. Déterminer alors un équivalent simple de a_n quand $n \to +\infty$.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. Donner son rayon de convergence.

Exercice 8 (critère spécial des séries alternées). **CCINP 18** [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. On note D l'ensemble des réels x en lesquels la série est convergente.
   (a) Etudier la convergence normale et la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La somme S est-elle continue sur D ?

Exercice 9 (régularité d'une somme). **CCINP 24** [ ]

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler le développement en série entière en 0 et le rayon de convergence de $ch(x)$.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(0) = 1,\ f(x) = ch(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0,\ f(x) = \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (calcul explicite de la somme à l'aide des développements usuels). [ ]

1. Montrer que, pour tout réel x, la série entière de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{2n+5}}{n!(n+2)}$ converge absolument.
2. On note $f(x)$ sa somme. Déterminer un série entière de somme $g(x)$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x^2)$$
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
4. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 11 (somme d'une série entière). ★★★ [ ]

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la série entière $\sum n^3 z^n$. Déterminer son rayon de convergence et préciser la somme de la série.
2. On note $f : x \longmapsto \ln(1 + x + x^2)$. Montrer que pour tout $|x| < 1$,
$$f(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(\frac{2n\pi}{3})$$

Exercice 12 (développement en série entière d'une fonction définie par une intégrale). [ ]

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\, dt$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$, puis justifier que f peut être prolongée par continuité en 0.
2. Montrer que f est développable en série entière, et calculer son rayon de convergence.

Exercice 13 (utilisation du théorème d'Abel radial). ★★★ [ ]

Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(n+1)} x^{n+1}$$

Exercice 14 (développement en série entière en 0). ★★★ [ ]

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière en 0, et calculer les coefficients de son développement. On précisera alors le rayon de convergence obtenu.

Exercice 15 (équivalent de la somme d'une série entière). ★★★ [ ]

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

1. Préciser le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$.
2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.
   Donner la limite de $e^{-x} f(x)$ quand $x \to +\infty$, puis en déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 16 (formule intégrale de Cauchy). **X/ENS** [ ]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et de rayon de convergence $R > 0$. On note pour tout $z \in B(0,R)$, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $r \in]0,R[$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

*Avec $r = R/2$, on obtient l'expression des coefficients de la série entière à partir de la somme f. Cette **formule de Cauchy** nous livre en fait l'**unicité des coefficients dans le développement en série entière**.*

Exercice 17 (théorème d'Abel radial sans les suites de Cauchy). **X/ENS** [ ]

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. On suppose de plus que la série $\sum a_n R^n$ converge et on note pour tout $N \geq 0$,

$$\rho_N = \sum_{k=N}^{+\infty} a_k R^k$$

1. Etablir que pour tout $x \in [0,R[$,
$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k x^k = \rho_N \left(\frac{x}{R}\right)^N + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \rho_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k-1}\right)$$
2. En déduire que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,R]$ et que $\lim_{x\to R} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k$.
3. Justifier alors rapidement que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 18 (théorème de Bernstein sur les séries entières). **X/ENS** [ ]

Soit $a > 0$ deux réels et $f :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose de classe C^∞. On dit que f est absolument monotone si f et toutes ses dérivées sont positives sur $]-a,a[$.

1. Donner des exemples de fonctions absolument monotones.
2. Montrer qu'une fonction absolument monotone sur $]-a,a[$ est nécessairement développable en série entière.