**Exercice 1** (convergence simple et convergence uniforme). **CCINP 9** [ ]

1. Soit $X$ un ensemble, et notons $(g_n)$ une suite de fonctions de $X$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme de la suite $(g_n)$ vers $g$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Etudier la convergence simple de $(f_n)$.
   (b) La suite $(f_n)$ converge t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$ ?
   (c) Soit $a > 0$. La suite $(f_n)$ converge t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$ ? Converge t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$ ?

**Exercice 2** (limite d'une suite d'intégrales définies sur un segment). **CCINP 10** [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer alors la limite :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\, dx$$

**Exercice 3** (autour de la convergence uniforme). **CCINP 11** [ ]

1. Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$ et notons $(f_n)$ une suite de fonctions définies sur $X$ et à valeurs réelles et telles que $f_n \xrightarrow{CS} f$. On suppose qu'il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\longrightarrow 0$.
   Démontrer que la suite $(f_n)$ ne peut pas converger uniformément vers $f$ sur $X$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)$.
   (b) Etudier alors la convergence uniforme de $(f_n)$ sur $[a, +\infty[$ $(a > 0)$, puis sur $]0, +\infty[$.

**Exercice 4** (convergence uniforme sur tout compact). ★★★ [ ]

Soit $z \in \mathbb{C}$, on veut montrer que :
$$(1+\frac{z}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et on pose $m = \max\{|a|, |b|\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a^n - b^n| \leq |a-b|.nm^{n-1}$.
2. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{C}$, $|e^{nu} - (1+u)^n| \leq |u|^2.ne^{n|u|}$, puis établir la convergence simple demandée.
3. On note $f_n : z \longmapsto (1+\dfrac{z}{n})^n$. Montrer que $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur tout compact $K$.

**Exercice 5** (convergence d'une suite de fonctions définies par récurrence). [ ]

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose positive et bornée sur $\mathbb{R}$, et on définit la suite d'applications $(f_n)$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = \sqrt{1+f_n(x)}$$

1. Etablir que la suite $(f_n)$ converge simplement vers une fonction constante notée $f$.
2. Montrer alors que $f_n \xrightarrow{CU} f$.

**Exercice 6** (le théorème des moments). ★★★ [ ]

On considère $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0$.
Montrer que $f = 0$.

**Exercice 7** (utilisation du critère spécial des séries alternées). **CCINP 8** [ ]

1. Soit $(u_n)$ une suite décroissante et de limite nulle.
   Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente et donner une majoration du reste partiel.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
   (b) Montrer que la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 8** (une condition nécessaire de convergence uniforme). **CCINP 17** [ ]

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et notons $(f_n)$ une suite de fonctions définies sur $A$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\sum f_n \text{ converge uniformément } \Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} 0$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
   (a) Prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   (b) La série de fonctions converge t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$ ? Justifier.

**Exercice 9** (une application du théorème de la double limite). **CCINP 53** [ ]

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$$

1. Prouver que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée $f$.
2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. La série converge t-elle normalement sur $[a, b]$ ? sur $[a, +\infty[$ ?
3. La série converge t-elle normalement sur $[0, +\infty[$ ?
4. Justifier que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
5. Déterminer alors la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

**Exercice 10** (dérivabilité de la somme d'une série de fonctions). **CCINP 16** [ ]

On considère la série de fonctions de terme général $u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ u_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$$

On pose, sous réserve d'existence, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$.

1. Etablir que $S$ est bien définie sur $[0, 1]$ et dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer alors $S'(1)$.

**Exercice 11** (développement asymptotique d'une somme de séries de fonctions). ★★★ [ ]

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n$ sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1 + nx}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et uniformément sur $[1, +\infty[$. On note $S$ la somme de la série.
2. Justifier que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. On pose $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Etablir que : $S(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x \to +\infty}{O}(\dfrac{1}{x\sqrt{x}})$.

**Exercice 12** (étude de la somme d'une série de fonctions). [ ]

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et définie par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n)$$

1. Etudier la convergence de la série $\sum f_n$ et sous réserve d'existence, on note encore $S$ sa somme.
2. Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $[0, 1[$ et que $S$ est strictement croissante sur $[0, 1[$.
3. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \geq \ln(\sum_{k=0}^{n} x^k)$$

   En déduire la limite de $S(x)$ quand $x \to 1$.

**Exercice 13** (dérivabilité de la somme d'une série de fonctions). ★★★ [ ]

On pose sous réserve d'existence $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etablir que $f$ n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 14** (limite d'une suite d'intégrales définies sur un intervalle). **CCINP 27** [ ]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)$ sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in ]0,1[$. La suite $(f_n)$ converge t-elle uniformément sur $[a,1]$ ?
3. La suite de fonctions converge t-elle uniformément sur $[0,1]$ ?
4. Trouver alors la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 15** (une autre définition de la fonction $\Gamma$). ★★★ [ ]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère alors la suite de fonction $(f_n)$ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} (1-\dfrac{t}{n})^n t^{\lambda-1} \text{ , si } t \in ]0,n] \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction $f$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et établir que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\lambda n!}{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}$$

**Exercice 16** (intégration terme à terme pour une série de fonctions définies sur un intervalle). **CCINP 49** [ ]

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes et on pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)$ est bornée.
   (b) Prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On admet alors que sa somme $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$.
   (b) Montrer alors que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

**Exercice 17** (une autre application du théorème d'intégration terme à terme). [ ]

Soient $a, b > 0$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

*On pensera à vérifier si toutes ces expressions sont bien convergentes.*

**Exercice 18** (calcul de l'expression d'une intégrale à l'aide des fonctions $\zeta$ et $\Gamma$). ★★★ [ ]

Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(x - \ln(e^x - 1))\,dx = \zeta(\alpha+1).\Gamma(\alpha)$$

où $\zeta(\alpha+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ et $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$.

**Exercice 19** (intégration terme à terme à l'aide du théorème de convergence dominée). [ ]

Soit $\alpha > 0$. Etablir que :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$$

**Exercice 20** (résolution d'une équation fonctionnelle). ★★★ [ ]

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :
$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$
2. Montrer que $f$ est continue, intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

**Exercice 21** (résolution d'une équation différentielle à l'aide d'une intégrale à paramètre). **CCINP 30** [ ]

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\, dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle $(\mathcal{E})$ d'ordre 1 dont $f$ est solution, puis déterminer l'expression de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 22** (équivalent d'une intégrale à paramètre). **CCINP 50** [ ]

On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\, dt$.

1. Prouver que $F$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $xF(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$ et préciser sa valeur.
3. En déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 23** (calcul explicite d'une intégrale à paramètre). [ ]

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x} dt$.

1. Justifier l'existence de $F(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $F(1) = 0$, puis déterminer la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 24** (la fonction Trigamma). [ ]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $H$ est $D_H = ]-1, +\infty[$.
2. Démontrer que $H$ est de classe $C^1$ sur $D_H$, puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} H(x)$.
3. Etablir que pour tout $x > -1$, $H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$.
4. En déduire que pour tout $x > -1$,
$$H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

**Exercice 25** (calcul explicite des intégrales de Wallis). ★★★ [ ]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\, dt$$

1. Montrer que $J$ est solution de $(\mathcal{E})$ $\quad xy'' + y' + xy = 0$.
2. Etablir que $J$ peut s'écrire sous la forme d'un développement en série entière définie sur $\mathbb{R}$. *On pourra introduire $(W_n)$ la suite des intégrales de Wallis.*
3. Déterminer les solutions développables en série entière de $(\mathcal{E})$, puis en comparant les résultats obtenus, donner l'expression des intégrales de Wallis $W_{2n}$.

**Exercice 26** (intégrale à paramètre et somme d'une série de fonctions). ★★★ [ ]

Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt$.

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que $f$ est même de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer finalement que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$$

**Exercice 27** (calcul de l'intégrale de Dirichlet). ★★★ [ ]

Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt$.

1. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, et établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. En déduire la valeur de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$
*On pourra introduire pour tout $x \geq 0$, $\phi(x) = \int_0^x h(t)\, dt$ où $h : t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ qu'on prolonge par continuité sur $\mathbb{R}_+$.*

**Exercice 28** (théorème de Dini). **X/ENS** [ ]

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs réelles telles que :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{CS} f \text{ , avec } f \text{ est une fonction continue sur } [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est croissante sur } [a,b] \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.

**Exercice 29** (approximation de l'unité et produit de convolution). **X/ENS** [ ]

On considère une **approximation de l'unité**, c'est à dire une suite $(\varphi_n)$ d'éléments de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1 \text{ et } \forall \delta > 0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à support compact, on note le produit de convolution :

$$f * \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_n(t)\, dt$$

1. Justifier l'existence des intégrales définissant le produit de convolution sur $\mathbb{R}$, et montrer qu'elles sont effectivement égales.
2. Montrer alors que la suite $f * \varphi_n$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 30** (une autre preuve de d'Alembert-Gauss). **X/ENS** [ ]

On considère $f$ une fonction $2\pi$-périodique et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si de plus, $f$ ne s'annule pas, on définit la **fonction indice** par :

$$I(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt$$

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt\right)$. Montrer que $\psi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, puis justifier que $\psi$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. Etablir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\psi = \lambda f$. En déduire $\psi$ est $2\pi$-périodique et que nécessairement $I(f) \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on suppose de degré $n \geq 1$. Montrer alors que $P$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
*On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction $f_r : t \longmapsto P(re^{it})$ pour tout $r \geq 0$ et définir une intégrale à paramètre en posant $F(r) = I(f_r)$.*