Exercice 1 (convergence dans une algèbre normée de dimension finie). **CCINP 40** [ ]
Soit A une algèbre de dimension finie et $\|.\|$ une norme d'algèbre sur A vérifiant $\|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$.

1. Soit $u \in A$ tel que $\|u\| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) On note e l'élément unité. Etablir que $e - u$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice 2 (normes non équivalentes). **CCINP 37** [ ]
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$,

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

1. (a) Montrer que N_∞ et N_1 sont des normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k >$ tel que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3 (exemple de fermés dans $\mathbb{R}^2$). **CCINP 41** [ ]
Enoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée, et poru chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Par contre,

- on utilisera au moins une fois les suites et le passage au complémentaire,
- on ne pourra pas utiliser les cas particuliers $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$.

Exercice 4 (adhérence de la réuion, adhérence de l'intersection). **CCINP 44** [ ]
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A, B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation séquentielle de l'adhérence d'un ensemble.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas toujours vraie. *On pourra se plonger dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (densité des matrices complexes diagonalisables). ★★★ [ ]

1. Montrer que l'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On se place alors dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit :

$$\phi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto \Delta_{\chi_M}$$

   où Δ_{χ_M} désigne le discriminant de χ_M. Justifier rapidement que ϕ est continue, puis établir que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (opérateur de différence sur les suites). [ ]
On note ℓ^∞ l'espace vectoriel formé des suites réelles bornées muni de la norme infinie définie par :

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

et on considère l'opérateur de différence $\Delta : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ défini par $\Delta(x) = y$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - x_n$.

Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$. Etablir alors que Δ est continue et déterminer $|||\Delta|||$.

Exercice 7 (norme subordonnée de la trace). [ ]

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Montrer que l'application $tr : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et déterminer sa norme $|||tr|||$.

Exercice 8 (calcul de normes subordonnées). **CCINP 38** [ ]

1. On se place dans $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$, et on considère l'endomorphisme $u : E \longrightarrow E$ défini par :

   $$u(f) = g : x \in [0,1] \longmapsto \int_0^x f(t)\, dt$$

   Prouver que $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|||u|||$. *On pourra pour $n \in \mathbb{N}^*$ utiliser la fonction $f_n : t \longmapsto ne^{-nt}$.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet non nul fixé. On considère la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

   $$u : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

   (a) Justifier que u est continue et cela quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_2$. Calculer $|||u|||$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Calculer $|||u|||$.

Exercice 9 (norme subordonnée sur un espace de fonctions). [ ]

On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $F = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On définit enfin $T : E \longrightarrow F$ par $T(f) : x \in [0,1] \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(f)\, dt$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Démontrer que T est continue et calculer sa norme $|||T|||$.

Exercice 10 (continuité des applications comatrice et inverse). ★★★ [ ]

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Etablir que l'application $M \longmapsto M^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. On note $C(A)$ la comatrice d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier qu'on a pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$:

   $$C(AB)^T = C(B)^T.C(A)^T$$

Exercice 11 (exemple de partie fermée et bornée, mais non compacte). **CCINP 58** [ ]

1. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée et bornée.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la forme $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{deg(P)} |a_i|$.

   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in E,\ \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour deux entiers naturels $n \neq m$. $S(0,1)$ est-elle compaccte dans E ?

Exercice 12 (somme de deux parties). [ ]

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si K et L sont compacts, montrer que $K + L$ est encore une partie compacte.
2. Si K est compact et F est fermé, montrer que $K + F$ est encore une partie fermée.

Exercice 13 (cas particulier des matrices orthogonales). [ ]

1. On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ M^T = M^{-1}\}$. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que l'ensemble $\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ A^2 = I_n\}$ est une partie fermée de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 (moyenne des itérés d'un endomorphisme). ★★★ [ ]

Soit K une partie non vide d'un espace vectoriel E qu'on suppose compacte et convexe. On considère de plus $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $f(K) \subset K$ et on fixe $x \in K$.

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in K$ et établir que :
$$\|f(u_n) - u_n\| \longrightarrow 0$$
2. Montrer alors que f admet au moins un point fixe dans K.

Exercice 15 (application faiblement contractante). ★★★ [ ]

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. On note $f : K \longrightarrow K$ telle que :
$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f possède un unique point fixe, noté ℓ.
2. Soient $x_0 \in K$ et (x_n) la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_{n+1} = f(x_n)$.
Montrer que $x_n \longrightarrow \ell$.

Exercice 16 (caractérisation des formes linéaires continues). **X/ENS** [ ]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle.

1. Montrer que si ϕ est continue sur E, alors $Ker(\phi)$ est fermé dans E.
2. On suppose maintenant que $Ker(\phi)$ est fermé et on fixe $y \in E$ tel que $\phi(y) = 1$.
   (a) Etablir que $\phi^{-1}(\{1\}) = y + H$, et établir qu'il s'agit d'une partie fermée.
   (b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.
   (c) Démontrer que : $x \in B(0, r) \Rightarrow |\phi(x)| \leq 1$.
   (d) Etablir alors que ϕ est nécessairement continue sur E.

Exercice 17 (théorème de Riesz). **X/ENS** [ ]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On souhaite établir le **théorème de Riesz** :
$$E \text{ est de dimension finie} \Leftrightarrow B_f(0, 1) \text{ est compacte dans } E$$

1. Justifier rapidement que le sens direct est immédiat.
2. Pour le sens réciproque, on procède par contraposée en supposant que E est de dimension infinie.
   (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et notons $x \in E \backslash F$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$. En déduire qu'il existe un vecteur unitaire $u \in E$ tel que :
   $$d(u, F) = 1$$
   (b) Montrer alors que $B_f(0, 1)$ n'est pas compacte.

Exercice 18 (critère de convergence pour les systèmes dynamiques discrets). **X/ENS** [ ]

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ qu'on suppose continue et considérons $(u_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que (u_n) converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.