Exercice 1 (calcul de l'exponentielle d'une matrice donnée). [ ]

On définit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer explicitement $\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}A^k$.

Exercice 2 (une application de la réduction aux systèmes différentiels). **CCINP 74** [ ]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A, puis une base de vecteurs propres associés.
2. Résoudre alors le système différentiel donné par : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2z(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = 2x(t) + z(t) \end{cases}$.

Exercice 3 (application du théorème des noyaux). **CCINP 93** [ ]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $Im(u) \oplus Ker(u) = E$.
2. (a) Enoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $Im(u) = Ker(u^2 + u + id_E)$.
3. On suppose que u n'est pas bijectif. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 4 (spectres de $u \circ v$ et $v \circ u$). **CCINP 83** [ ]

Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P(t)\,dt$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $Ker(u \circ v)$ et $Ker(v \circ u)$. Le résultat précédent est-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. On suppose que E est de dimension finie. Justifier que le résultat de la première question est vrai, même pour $\lambda = 0$.

Exercice 5 (endomorphisme en dimension finie et cardinal des valeurs propres). ★★★ [ ]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB - BA = B$$

1. Montrer que B n'est pas inversible.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$.
3. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 6 (matrices à diagonale dominante et disques de Gershgörin). ★★★ [ ]

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est à **diagonale dominante** si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

1. Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est nécessairement inversible.
2. En déduire que les valeurs propres d'une matrice A quelconque appartiennent à l'union pour $i \in [\![1, n]\!]$ des disques de centre a_{ii} et de rayon $R_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, c'est à dire :

$$Sp(A) \subset \cup_{i=1}^{n} B_f(a_{ii}, R_i)$$

Exercice 7 (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon). [ ]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On considère le polynôme $P_n = a_0 + a_1 X + \dots a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ et la matrice compagnon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles.
2. Etablir que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = P_n(\lambda)$.
3. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

Exercice 8 (réduction des matrices circulantes). [ ]
On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices circulantes, c'est à dire des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \text{ et on note } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^2, $J^3, \dots$ et J^n.
2. Montrer que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, puis préciser ses éléments propres.
3. En déduire que toute matrice circulante $A \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice 9 (diagonalisabilité d'un endomorphisme). **CCINP 59** [ ]
Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Posons $E = \mathbb{K}_n[X]$ et on définit alors f sur E par $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : sans utiliser de matrice ou en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Déterminer $P \in E$ tel que $f(P) = Q$. On pourra considérer $P^{(n+1)}$.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 10 (diagonalisabilité d'une matrice). **CCINP 67** [ ]
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 11 (commutant d'une matrice). **CCINP 73** [ ]
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer $C(A)$, l'ensemble des matrices qui commutent avec A, puis justifier que : $C(A) = Vect(I_2, A)$.

Exercice 12 (polynôme minimal et application au calcul des puissances d'une matrice). **CCINP 91** [ ]
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre qu'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer en le justifiant le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$, puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 (étude d'un endomorphisme sur un espace de matrices). **CCINP 88** [ ]

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Montrer que $P(u) = 0 \Rightarrow$ toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \geq 2$ et posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On défnit alors la matrice $A = (a_{ij})$ par $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = M + tr(M)A$.

   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? On pourra procéder de deux façons.

Exercice 14 (une autre application de la réduction aux systèmes différentiels). **CCINP 75** [ ]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A. Trouver une base B dans laquelle la matrice de f soit triangulaire.

3. En déduire la résolution du système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$.

Exercice 15 (trigonalisation et application à la décomposition de Dunford). [ ]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Montrer qu'on a la décomposition spectrale : $\mathbb{R}^3 = Ker(u - id) \oplus Ker(u - 2id)^2$.

2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition de la forme :

$$Ker(u - id) = Vect\{e_1\}, Ker(u - 2id) = Vect\{e_2\}, Ker(u - 2id)^2 = Vect\{e_2, e_3\}$$

   puis, écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

3. En utilisant la matrice B, préciser alors la **décomposition de Dunford** de la matrice A, c'est à dire déterminer des matrices D, N telles que :

$$\begin{cases} A = D + N \\ D \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente} \\ DN = ND \end{cases}$$

Exercice 16 (matrices de rang 1). [ ]

Soit $n \geq 2$ et considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $rg(A) = 1$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $tr(A) \neq 0$.

Exercice 17 (matrices complexes de spectres disjoints). ★★★ [ ]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeur propre commune.

1. En notant $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A, montrer que $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que $AX = XB \Leftrightarrow X = \{0\}$.

3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 18 (limite des puissances d'une matrice diagonalisable). ★★★ [ ]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la suite (A_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{n} \\ \dfrac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la limite de la suite (A_n^n) quand $n \to +\infty$.

Exercice 19 (diagonalisabilité équivalente de A et A^2 pour une matrice inversible). ★★★ [ ]

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.

Exercice 20 (condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité). ★★★ [ ]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on définit la matrice B par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ A & O_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que B est semblable à la matrice $B' = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -A \end{pmatrix}$.

2. Etablir alors que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

Exercice 21 (utilisation de la réduction simultanée). [ ]
On considère $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qu'on suppose nilpotente telle que $AN = NA$. Montrer alors que :

$$\det(A+N) = \det(A)$$

Exercice 22 (exponentielle de matrices réelles diagonalisables). ★★★ [ ]
Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et on suppose de plus que $\exp(A) = \exp(B)$.
Montrer que nécessairement $A = B$.

Exercice 23 (comatrice et polynôme caractéristique). **X/ENS** [ ]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On note $com(A)$ la comatrice de A. Montrer que si A et B sont inversibles, alors on a :

$$com(AB) = com(A)com(B)$$

   L'égalité est-elle encore vraie si A ou B n'est pas inversible ?

2. On suppose que A et B sont semblables, établir que $com(A)$ et $com(B)$ sont encore semblables.

3. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que :

$$tr(com(A)) = (-1)^{n-1}\chi_A'(0)$$

Exercice 24 (caractérisation des matrices nilpotentes à l'aide de la trace). **X/ENS** [ ]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si :

$$tr(A) = tr(A^2) = \ldots = tr(A^n) = 0$$

On pourra essayer de proposer deux méthodes.

Exercice 25 (rayon spectral). **X/ENS** [ ]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le rayon spectral par :

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\rho(M) < 1$

(ii) la suite (M^k) converge vers 0

(iii) la série $\sum M^k$ est convergente