Exercice 1 (utilisation d'un développement en série entière). [ ]

On considère l'intégrale définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\, dt$$

et on rappelle que pour tout $x > 1$, on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

1. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de l'intégrale I_p.
2. Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$I_p = p!\zeta(p+1)$$

Exercice 2 (utilisation d'un développement en série entière). ★★★ [ ]

Etablir que chacun des membres est bien défini, puis montrer l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\, dt$$

Exercice 3 (base des polynômes de Lagrange). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ qu'on suppose distincts. On note $P = \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ et on introduit $(L_0, \dots, L_n)$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux points a_i.

1. Rappeler l'expression des polynômes de Lagrange vérifiant :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![0,n]\!],\ L_i \in \mathbb{K}_n[X] \\ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(a_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$
2. Justifier que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Déterminer alors pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, le reste de la division euclidienne de A par P.

Exercice 4 (interpolation en des points donnés). **CCINP 87** [ ]

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ désignent $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ vérifiant :
$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i$$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter ce polynôme L_k lorsque pour tout i, $b_i = \delta_{ik}$.
3. Prouver alors que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 5 (factorisation en produit de polynômes irréductibles). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$$

Exercice 6 (factorisation en produit de polynômes irréductibles). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Former la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$.
2. En déduire la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n} \sin(\frac{k\pi}{n+1})$.

Exercice 7 (produit des racines). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme P à coefficients réels défini par $P(X) = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On pose $Q(X) = \frac{P(X)}{X}$. Etablir que Q est encore un polynôme, puis démontrer que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{n}{2^{2n-2}}$$

Exercice 8 (factorisation des polynômes de Legendre). ★★★ [ ]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième polynôme de Legendre par $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$.
4. Considérons Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = 0$.
5. En déduire que (L_n) constitue une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 (existence et unicité des polynômes orthogonaux associés à un poids donné). ★★★ [ ]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et considérons $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qu'on suppose continue sur I et telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t^n\omega(t) \in L^1(I,\mathbb{R})$$

1. Montrer que $\phi : (P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_I P(t)Q(t)\omega(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Etablir qu'il existe une unique famille de polynômes orthogonaux (P_n) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$deg(P_n) = n \text{ et } dom(P_n) = 1$$
3. Justifier que (P_n) désigne une base orthogonale dénombrable de $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est nécessairement scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 (décomposition des polynômes réels positifs). ★★★ [ ]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer alors que :
$$P \text{ est de signe constant positif } \Leftrightarrow \exists\,(U,V) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = U^2 + V^2$$

Exercice 11 (calcul de $\zeta(2)$). ★★★ [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall\, x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ P_n(\cot^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}$$
2. Déterminer les racines de P_n, ainsi que leur somme.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cot^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2(x)$.
   (b) En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 12 (théorème des moments pour une fonction continue). **CCINP 48** [ ]

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

1. Enoncer le théorème de Weierstrass d'approximation uniforme par des fonctions polynômiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f, c'est à dire :
$$\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   (a) Montrer que la suite $(P_n f)$ converge uniformément vers f^2.
   (b) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\,dt$.
   (c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,dt$.
3. En déduire que f est nulle sur le segment $[0,1]$.

Exercice 13 (borne de Cauchy). **X/ENS** [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n à coefficients éventuellement complexes par :

$$P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \text{ , avec } a_n \neq 0$$

et on pose $M = \max_{k \in [\![0,n-1]\!]} (\frac{|a_k|}{|a_n|})$. Etablir que pour toute racine α de P_n, on a nécessairement :

$$|\alpha| \leq 1 + M$$

Cette constante majorant le module de α désigne la ***borne de Cauchy*** *associée à P_n, et elle nous permet de localiser les racines de P_n de sorte que pour toute racine α, on a :*

$$\alpha \in B_f(0, 1+M)$$

Exercice 14 (polynômes de Hilbert). **X/ENS** [ ]

On pose $H_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. En déduire que le produit de n entiers consécutifs dans $\mathbb{Z}$ est toujours divisible par $n!$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

   (ii) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) \in \mathbb{Z}$

   (iii) il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.

Exercice 15 (une preuve de d'Alembert-Gauss). **X/ENS** [ ]

On considère f une fonction 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si de plus, f ne s'annule pas, on définit la **fonction indice** par :

$$I(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt$$

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \exp(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt)$. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis justifier que ψ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

2. Etablir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\psi = \lambda f$. En déduire ψ est 2π-périodique et que nécessairement $I(f) \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on suppose de degré $n \geq 1$. Montrer alors que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
   On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction $f_r : t \longmapsto P(re^{it})$ pour tout $r \geq 0$ et définir une intégrale à paramètre en posant $F(r) = I(f_r)$.