Exercice 1 (étude d'une suite d'intégrales). [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$, puis retrouver alors que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 2 (calcul de deux intégrales jumelles). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les intégrales jumelles I_n et J_n par :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\sin^n(t) + \cos^n(t)} \, dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{\sin^n(t) + \cos^n(t)} \, dt$$

1. Calculer $I_n + J_n$.
2. Déterminer alors la valeur de chacune de ces intégrales.

Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite d'intégrales définies sur un segment). [ ]

On considère la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite (I_n) est convergente, puis établir en fait que $I_n \longrightarrow 1$.
3. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.

Exercice 4 (calcul explicite des intégrales de Wallis et formule de Stirling). ★★★ [ ]

On rappelle qu'on définit les intégrales de Wallis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, $W_n = (\dfrac{n-1}{n}).W_{n-2}$.
2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.1$.
3. Justifier qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.
4. On rappelle que $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. Montrer que $\lambda = \sqrt{2\pi}$ de sorte que : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n$ (formule de Stirling).

Exercice 5 (étude de la convergence d'intégrales). [ ]

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) \, dx \ ,\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sqrt{x^3+1}} \, dx \ ,\ I_3 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^3+x^2} \, dx \ ,\ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3+1}} \, dx$$

Exercice 6 (existence et calcul d'une intégrale généralisée). [ ]

Justifier la convergence des intégrales suivantes, puis déterminer leur valeur :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx \ ,\ I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(x)}{ch(2x)} \, dx \ ,\ I_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Exercice 7 (deux études d'intégrabilité). **CCINP 28** [ ]

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 8 (existence et calcul d'une intégrale à paramètre entier). ★★★ [ ]

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}\, dx$$

Justifier que ces intégrales sont bien définies, et déterminer l'expression de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 (limite et équivalent d'une intégrale à paramètre). [ ]

Sous réserve d'existence, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x}\, dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie.
2. Etablir que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 10 (équivalent d'une intégrale à paramètre). [ ]

Sous réserve d'existence, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\, dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est convergente.
2. Trouver alors un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 11 (équivalent d'une intégrale à paramètre). ★★★ [ ]

On note, sous réserve d'existence, $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\, dt$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I(x)$ existe.
2. Déterminer la limite de $I(x)$ quand $x \to 0$, puis déterminer un équivalent de $I(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 12 (existence et calcul d'une intégrale en $\ln(\sin(x))$ ou $\ln(\cos(x))$). ★★★ [ ]

On définit les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\, dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\, dx$$

1. Justifier que ces intégrales sont convergentes et déterminer leur valeur.
2. En déduire l'existence et la valeur de :
$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\, dx$$

Exercice 13 (calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide des intégrales de Wallis). [ ]

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx,\ W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx,\ I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx,\ J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$$

1. Exprimer I_n et J_n en fonction des termes de la suite (W_n).
2. Montrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in [0,1],\ 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \\ \forall x \geq 0,\ e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$
3. En déduire un encadrement de I par des intégrales de Wallis, puis retrouver sa valeur.

Exercice 14 (somme de Riemann généralisée). ★★★ [ ]

On considère $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose décroissante, continue et intégrable sur $]a,b]$.

1. Montrer que :
$$\frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{(b-a)}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\, dt$$
2. En déduire quand $n \to +\infty$ la limite de $(\dfrac{n!}{n^n})^{1/n}$.

Exercice 15 (une première approche de la convergence uniforme). **CCINP 14 [ ]**

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose de plus que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, c'est à dire :
$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Montrer que nécessairement $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que :
$$\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Exercice 16 (application du théorème de convergence dominée). **CCINP 25 [ ]**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\,dt$. Calculer la limite de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 17 (application du théorème de convergence dominée). **CCINP 26 [ ]**

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Etudier la monotonie de (I_n).
   (b) Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice 18 (calcul de l'intégrale de Poisson). **X/ENS [ ]**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

1. Etablir que :
$$\left(\frac{r+1}{r-1}\right).(r^{2n}-1) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$$
2. Justifier la convergence de $I(r) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos(t) + r^2)\,dt$, puis retrouver sa valeur.

Exercice 19 (méthode de quadrature de Gauss). **X/ENS [ ]**

Soient $n \geq 1$ et $L_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 Q(x)L_n(x)\,dx = 0$.
2. Etablir que L_n admet n racines simples $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ dans l'intervalle $]-1, 1[$.
3. Montrer alors qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^1 Q(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q(x_i)$$

Exercice 20 (théorème de la limite centrée). **X/ENS [ ]**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique. Montrer que :
$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}\,dx$$

On pourra commencer par $f(x) = e^{i\alpha x}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et utiliser l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.