Exercice 1 (existence et calcul de la somme). [ ]

Pour chacune des séries suivantes, montrer que la série est convergente et déterminer sa somme :

1. $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
2. $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(2n+1)}$
3. $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$

Exercice 2 (nature d'une série à termes positifs). [ ]

Déterminer la nature de la série dont le terme général est défini par :

$$a_n = \frac{|\sin(n)| + |\cos(n)|}{n^2}\ ,\ b_n = n^{-1-1/n}\ ,\ c_n = \frac{(n!)^2}{(2n!)}\ ,\ d_n = e^{-\sqrt{n}}\ ,\ e_n = (\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2$$

Exercice 3 (exemples de séries de Bertrand). [ ]

Déterminer la nature de la série dont le terme général est défini par :

$$a_n = \frac{1}{n^2 \ln(n)}\ ,\ b_n = \frac{\ln(n)}{n^2}\ ,\ c_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\ ,\ d_n = \frac{1}{n\ln(n)}\ ,\ e_n = \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

Exercice 4 (un autre exemple des séries de Bertrand). **CCINP 5** [ ]

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. (a) On suppose $\alpha \leq 0$. En utilisant une minoration simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) On suppose $\alpha > 0$. Etudier la nature de la série.
   On pourra utiliser la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(e - (1+1/n)^n)e^{1/n}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 5 (termes généraux équivalents de séries à termes positifs). **CCINP 7** [ ]

1. Soient (u_n) et (v_n) deux séries de nombres réels positifs. On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que :
$$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$
2. Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin(1/n)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Exercice 6 (série dont le terme général est défini par une relation de récurrence). [ ]

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}}$$

1. Déterminer la limite de (u_n) et préciser un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.
2. Déterminer alors la nature des séries $\sum \dfrac{1}{u_n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$.

Exercice 7 (nature d'une série de signe quelconque). [ ]

1. Déterminer la nature de la série dont le terme général est défini par :
$$u_n = \frac{(-1)^n \arctan(n)}{n^2}\ ,\ v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}\ ,\ w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\ ,\ x_n = (nsh(1/n))^{-n^a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$
2. Déterminer la nature de la série de terme général (u_n) vérifiant : $\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos(u_n)}{n} \end{cases}$.

Exercice 8 (nature d'une série de signe quelconque). **CCINP 46** [ ]

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

1. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \pi/2 + \alpha\pi/n + O(1/n^2)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ converge.
3. La série est-elle absolument convergente ?

Exercice 9 (existence et calcul d'une somme). [ ]

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\ln(1+\frac{1}{n}) - (1-\frac{1}{2n})$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Déterminer alors la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Exercice 10 (étude des transformées d'une série à termes strictement positifs). ★★★ [ ]

On considère $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note encore $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et fixons $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire de la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$?
2. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Etablir alors que :

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Exercice 11 (la transformation d'Abel). [ ]

On considère la série $\sum a_n b_n$, où (a_n) désigne une suite à valeurs réelles et (b_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k,\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$.
2. On se place dans le cas particulier où :

$$\begin{cases} \text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante de limite nulle} \\ \text{la suite } (B_n) \text{ est bornée} \end{cases}$$

   Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.
3. En déduire que la série $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Exercice 12 (comparaison logarithmique et règle de Raabe). ★★★ [ ]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n \leq C v_n$$

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. Montrer que :

$$\begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

   On pensera à utiliser une suite $v_n = 1/n^\beta$ avec β bien choisi, avant de se ramener à la question 1.

Exercice 13 (série dont le terme est donné sous forme intégral). ★★★ [ ]

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)x^n\,dx$.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $f(1) = 0$.
2. On suppose de plus que f est de classe C^1. Montrer que :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Exercice 14 (vers la formule de Stirling). [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n!} n^{n+1/2} e^{-n}$ et $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

1. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = -1 + (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n})$.
2. Montrer que la série $\sum w_n$ converge absolument. En déduire que la suite (u_n) tend vers une limite $a > 0$.
3. Montrer alors que $n! \sim \frac{1}{a} \sqrt{n} (\frac{n}{e})^{-n}$.

*En utilisant la forme explicite de W_{2n} et leur équivalent usuel, on peut retrouver que $1/a = \sqrt{2\pi}$ et obtenir la **formule de Stirling**.*

Exercice 15 (existence et calcul d'une somme double). [ ]

On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. Prouver l'existence puis calculer la somme double :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Exercice 16 (existence et calcul d'une somme double). ★★★ [ ]

Prouver l'existence puis calculer la somme double :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)^{2q}}$$

Exercice 17 (définition de l'exponentielle d'une matrice). **CCINP 61** [ ]

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$.

1. Prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$, puis que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|A^p\| \leq n^{p-1}\|A\|^p$.
3. Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?
4. On note $\exp(A)$ sa somme.
   (a) On admet qu'on peut adapter le théorème relatif au produit de Cauchy, et on considère B une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
   (b) En déduire que $\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 18 (série convergente et calcul de la somme). **X/ENS** [ ]

Justifier la convergence, puis calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n - 3E(n/3)}{n(n+1)}$$

Exercice 19 (série des inverses des nombres premiers). **X/ENS** [ ]

On pose $p_1 = 2$ et on note plus généralement p_n le n-ième nombre premier. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ est divergente.

On pourra d'abord montrer que les séries de terme général $1/p_n$ et $\ln((1 - 1/p_n)^{-1})$ sont de même nature.

Exercice 20 (rayon spectral). **X/ENS** [ ]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le rayon spectral par :

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\rho(M) < 1$

(ii) la suite (M^k) converge vers 0

(iii) la série $\sum M^k$ est convergente