Exercice 1 (une norme non euclidienne sur $\mathbb{R}[X]$). [ ]

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que les réels a_i sont distincts deux à deux et on pose pour tout $P \in E$:

$$\|P\|_a = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$$

1. Montrer que $\|.\|_a$ définit une norme sur E.
2. Déterminer explicitement des polynômes P_i de E tels que : $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ P_i(a_j) = \delta_{ij}$.
3. Calculer $\|P_i + P_j\|_a$, $\|P_i - P_j\|_a$, $\|P_i\|_a$ et $\|P_j\|_a$. En déduire que la norme $\|.\|_a$ n'est pas euclidienne.

Exercice 2 (une application de Cauchy-Schwarz). [ ]

Montrer que pour tous $A, B \in S_n(\mathbb{R})$,

$$(tr(AB + BA))^2 \leq 4tr(A^2)tr(B^2)$$

Exercice 3 (une application fine de Cauchy-Schwarz). ★★★ [ ]

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit ϕ sur E^2 par :

$$\phi(M, N) = tr(M^T N)$$

1. Montrer que ϕ désigne un produit scalaire sur E.
2. On note $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée. Montrer qu'il s'agit d'une norme d'algèbre vérifiant pour tout $(M, N) \in E^2$:

$$\|MN\|_2 \leq \|M\|_2.\|N\|_2$$

Exercice 4 (la norme-p est une norme sur $\mathbb{K}^n$). ★★★ [ ]

Soient p, q deux réels tels que $p > 1, q > 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On définit pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} \text{ et } \|x\|_q = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q)^{1/q}$$

1. Prouver que pour tout $a, b \geq 0$, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ (inégalité de Young).
2. Etablir que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \times \|x\|_q$ (inégalité de Hölder).
3. Montrer alors que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 5 (exemple de normes deux à deux non équivalentes). [ ]

Sur $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$, on définit les applications :

$$\begin{cases} N_\infty : f \in E \longmapsto \sup |f(x)| \\ N'_\infty : f \in E \longmapsto |f(0)| + \sup |f'(x)| \\ N''_\infty : f \in E \longmapsto |f(0)| + |f'(0)| + \sup |f''(x)| \end{cases}$$

1. Montrer que ces applications sont bien définies sur E, et qu'elles constituent des normes sur E.
2. Comparer les normes N_∞, N'_∞ et $N"_\infty$ pour la relation d'équivalence entre normes.

Exercice 6 (des suites réelles équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang). **CCINP 1** [ ]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que v_n est non nul à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.

1. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à parir d'un certain rang.
2. Dééterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \text{sh}(1/n) - \tan(1/n)$.

Exercice 7 (suite de nombres entiers relatifs convergente). [ ]

Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire, c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n = u_N$$

Exercice 8 (une application du théorème d'encadrement). [ ]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et précsier sa limite.

Exercice 9 (étude d'une suite d'intégrales). [ ]

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan^n(t)\, dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n + u_{n+2}$, puis que $u_n \longrightarrow 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} u_{2n+2}$. En déduire la limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ quand $n \to +\infty$.
3. Donner alors le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.

Exercice 10 (calcul d'un développement asymptotique). [ ]

On pose pou tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]n\pi, (n+1)\pi[$.

1. Montrer que l'équation $x = \text{cotan}(x)$ a une unique solution x_n sur I_n. En déduire un équivalent trivial de x_n.
2. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n\pi + \arctan(1/x_n)$.
3. Montrer alors qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x_n = a.n + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Exercice 11 (suites adjacentes). ★★★ [ ]

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0, b_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

1. Montrer que ces suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune ℓ.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\ell^2}{a_n})$, puis déterminer un équivalent de $a_n - \ell$.
   On pourra calculer le rapport $(a_{n+1} - \ell)/(a_{n+1} + \ell)$ et obtenir une relation de récurrence.

Exercice 12 (suite récurrente linéaire d'ordre 2). **CCINP 55** [ ]

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

1. (a) Prouver que E désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = u_1 = 1$. Exprimer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe u_n en fonction de n.

Exercice 13 (étude de suites récurrentes). [ ]

Etudier la nature de chacune des suites (u_n) définie par :

1. $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\lambda}{a_n})$ avec $\lambda > 0$
2. $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}u_n^2}$
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\ldots + \sqrt{a}}}}$ constitué de $n+1$ radicaux et avec $a > 0$

Exercice 14 (étude d'une suite récurrente). **CCINP 43** [ ]
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone, et préciser sa monotonie en fonction de la valeur de u_0.
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer alors l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = h(\arctan(x))$$

Exercice 15 (suite de matrices convergente). ★★★ [ ]
Soit $a \in \mathbb{R}$ et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la limite de la suite (A_n^n) quand $n \to +\infty$.

Exercice 16 (une autre suite de matrices convergente). [ ]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A^3 = A^2 - \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}I_n$$

Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur.

Exercice 17 (racine carrée d'une matrice symétrique définie positive). ★★★ [ ]
Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. On définit la suite (R_n) par $R_0 = I_p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$$

1. Justifier que cette suite est bien définie et que chaque R_n est bien diagonalisable.
2. Montrer que la suite (R_n) converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vers une matrice $R \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

Exercice 18 (une application du théorème de Césaro). **X/ENS** [ ]

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Montrer alors que :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

2. On définit alors la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$.
   Déterminer un équivalent simple de la suite u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 19 (moyenne des itérés d'un endomorphisme). **X/ENS** [ ]
Soient K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ qu'on suppose continu sur E tel que $f(K) \subset K$. On fixe $x \in K$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$$

En utilisant la suite (u_n), montrer que f possède au moins un point fixe dans K.

Exercice 20 (exemples de parties denses de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). **X/ENS** [ ]
Soit $n \geq 2$.

1. Etablir que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. (a) Montrer que l'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) On se place alors dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit :

$$\phi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto \Delta_{\chi_M}$$

   où Δ_{χ_M} désigne le discriminant de χ_M. L'ensemble des matrices réelles diagonalisables est-il dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?