Exercice 1 (décomposition en somme directe sur un espace de fonctions). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont de classe C^∞ et on définit F l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à n, G l'ensemble tel que :

$$G = \{f \in E,\ \forall p \in [\![0,n]\!], f^{(p)}(0) = 0\}$$

1. Justifier rapidement que F et G désignent des sous-espaces vectoriels de E, puis montrer que $E = F \oplus G$.
2. Préciser alors ce qu'est la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 2 (décomposition en somme directe de n sous-espaces vectoriels). [ ]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall\, j \in [\![0,n]\!] - \{i\},\ P(a_j) = 0\}$$

Montrer que $F_0, \dots F_n$ désignent des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'ils vérifient :

$$F_0 \oplus \dots \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X]$$

Exercice 3 (décomposition en somme directe et endomorphisme diagonalisable). [ ]

On donne $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x-z, 2x+y)$.

1. L'application f est-elle bijective ?
2. On note $E_f(-1) = Ker(f+id)$ et $E_f(2) = Ker(f-2id)$.
   Montrer que les sous-espaces $E_f(-1)$ et $E_f(2)$ sont des droites vectorielles dont on notera e_1 et e_2 les vecteurs générateurs.
3. Montrer que :
$$E = Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$$

Exercice 4 (condition nécessaire et suffisante de la décomposition en dimension finie). **CCINP 64** [ ]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Démontrer que $E = Im(f) \oplus Ker(f) \Rightarrow Im(f) = Im(f^2)$.
2. (a) Etablir que : $Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$.
   (b) Démontrer alors que :
$$Im(f) = Im(f^2) \Rightarrow E = Im(f) \oplus Ker(f)$$

Exercice 5 (étude d'un endomorphisme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). **CCINP 60** [ ]

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $f : M \longmapsto AM$.

1. Déterminer $Ker(f)$. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
2. Déterminer une base de $Im(f)$.
3. A t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$?

Exercice 6 (suites des noyaux et des images itérés). [ ]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = Im(f^p)$ et $N_p = Ker(f^p)$.

1. Montrer que $(I_p)_{p \geqslant 0}$ est décroissante au sens de l'inclusion, tandis que $(N_p)_{p\geqslant 0}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0, I_p = I_{p_0}$ et $N_p = N_{p_0}$.
3. Montrer que I_{p_0} et N_{p_0} sont supplémentaires dans E.

Exercice 7 (application de la caractérisation des isomorphismes en dimension finie). [ ]

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **polynômes de Bernstein** de degré n les polynômes réels définis par:

$$B_{n,k} = \tbinom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \text{ avec } k \in \{0, \dots, n\}$$

1. Montrer que la famille $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $B(P) = \sum_{k=0}^n P(\frac{k}{n}) B_{n,k}$.
   (a) Montrer que B est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer le noyau de B. Que peut-on en déduire ?

Correction des exercices

Exercice 1

1. A chaque fois, on se ramène à la caractérisation des sev de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Par exemple, on vérifie pour l'ensemble G :

   - $G \subset E$
   - si on note $f_0 : x \longmapsto 0$ la fonction nulle, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $f_0^{(p)}(0) = 0$ et donc $f_0 \in G$.
   - soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in G$, alors par linéarité de l'opérateur dérivée, on a pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:

   $$(\lambda f + g)^{(p)}(0) = \lambda f^{(p)}(0) + g^{(p)}(0) = \lambda.0 + 0 = 0$$

   et ainsi, $\lambda f + g \in G$

   D'après la caractérisation des sev, G est un sev de E. De la même façon, on montrerait trivialement que F est encore un sev de E.

   De plus, on rappelle que par exemple que pour deux sev :

   $$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \ (1) \\ F \cap G = \{0_E\} \ (2) \end{cases}$$

   On va alors démontrer chacune de ces assertions.
   (2) Soit $f \in F \cap G$, alors f peut s'écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Or f appartient à G et donc, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $f^{(p)}(0) = 0$, mais par opérations sur les polynômes, on a :

   $$f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k k(k-1)\dots(k-p+1)x^{k-p} \Rightarrow f^{(p)}(0) = a_p p!$$

   et ainsi, si $f \in G$, alors pour tout p, $a_p = 0$.
   On en déduit que f est nécessairement nulle, c'est à dire $F \cap G \subset \{0_E\}$ et donc, l'inclusion réciproque étant immédiate : $F \cap G = \{0_E\}$.

   (1) Reste à montrer que $E = F + G$. Pour cela, considérons $f \in E$, et on cherche d'abord $(g, h) \in G \times F$ tel que $f = g + h$.
   On peut procéder par analyse/synthèse.
   ANALYSE Si une telle décomposition existe, on a par dérivation :

   $$f^{(p)}(0) = g^{(p)}(0) + h^{(p)}(0) = 0 + h^{(p)}(0) \text{ car } g \in G$$

   mais h étant une fonction polynôme, elles s'écrit encore $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, et ainsi l'égalité précédente donne :

   $$f^{(p)}(0) = a_p p! \Leftrightarrow a_p = f^{(p)}(0)/p!$$

   Finalement, sous réserve d'existence, on trouve donc :

   $$h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

   et par suite, on a alors $g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
   SYNTHESE Pour f fixée dans E, on pose :

   $$\begin{cases} h(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{cases}$$

   et on vérifie que ce couple convient (c'est immédiat).
   En particulier, on a par analyse-synthèse que $E \subset F + G$, mais l'inclusion réciproque étant immédiate, on peut conclure que $E = F + G$.

   D'où, (1) et (2) sont vraies et par caractérisation, il vient $E = F \oplus G$.

2. En particulier, on peut remarquer que la projection de f sur F est la fonction polynôme h définie par :

   $$h(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

   qui n'est rien d'autre que le n-ième polynôme de Taylor de f en 0.

Remarque Bien entendu, on pouvait aussi se contenter de ne faire que l'ANALYSE-SYNTHESE et conclure par définition de la décomposition en somme directe.

Exercice 2
On remarque par exemple que F_0 désigne les polynômes qui s'annulent en toutes les valeurs, sauf éventuellement a_0. Ainsi, comme les sacalaires a_i sont distincts,

$$P \in F_0 \Leftrightarrow P(a_1) = \ldots = P(a_n) = 0 \Leftrightarrow (X - a_1)\ldots(X - a_n)|P$$

c'est à dire que dans $\mathbb{R}_n[X]$, un tel polynôme s'écrit :

$$P(X) = \lambda_0 . \prod_{i=1}^{n}(X - a_i) \text{ avec } \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

et ainsi, $F_0 = Vect(\prod_{i=1}^{n}(X - a_i))$ et il s'agit bien d'un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.
De la même façon, avec les autres sev puisqu'on a pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $F_j = Vect(\prod_{i\neq j}(X - a_i))$.

Reste à montrer la décomposition en somme directe. Pour cela, on rappelle qu'en dimension finie, on a la caractérisation :

$$E = \oplus_{j=0}^{n} F_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{décomposition unique du zéro (1)} \\ dim(E) = \sum_{j=0}^{n} dim(F_j) \text{ (2)} \end{cases}$$

(2) Les sous-espaces F_j sont des droites vectorielles, et donc on a immédiatement :

$$\sum_{j=0}^{n} dim(F_j) = n + 1 = dim(\mathbb{R}_n[X])$$

(1) Considérons une décomposition de la forme :

$$0 = P_0 + P_1 + \ldots + P_n \text{ avec } P_j \in F_j \quad (*)$$

En particulier, la forme des sous-espaces nous permettent de réécrire :

$$(*) \Leftrightarrow 0 = \lambda_0 . \prod_{i\neq 0}(X - a_i) + \lambda_1 . \prod_{i\neq 1}(X - a_i) + \ldots + \lambda_n . \prod_{i\neq n}(X - a_i)$$

et en évaluant an $X = a_j$ pour j fixé, on obtient :

$$0 = 0 + \ldots + \lambda_j . \underbrace{\prod_{i\neq j}(a_j - a_i)}_{\neq 0} + \ldots + 0$$

et donc, $\lambda_j = 0 \Rightarrow P_j = 0$ pour j quelconque.
Ainsi, les composantes sont toutes nulles, ce qui assure la décomposition unique du zéro et (1) est vraie.

Finalement, (1) et (2) sont vraies et par caractérisation, il vient $\mathbb{R}_n[X] = \oplus_{j=0}^{n} F_j$.

Remarque On pourra retenir que l'exercice est plus facile si on voit les sous-espaces F_j comme des $Vect$... c'est pour cela qu'on préfère souvent se ramèner à un $Vect$, plutôt que d'utiliser la caractérisation des sev à l'aide des trois points inclusion/présence du zéro/stabilité par combinaison linéaire.

Exercice 3

1. On va déterminer le noyau de f. Pour cela, considérons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$(x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

   Avec ce paramétrage en x, on en déduit que $Ker(f) = \{(x, -2x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -2, 1))$, et par caractérisation à l'aide du noyau, f n'est pas injective et donc, f n'est pas bijective.

2. Les espaces $E_f(-1)$ et $E_f(2)$ sont des sev en tant que noyau d'applications linéaires, de plus :

   - $(x, y, z) \in Ker(f + id) \Leftrightarrow (f + id)(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ c'est à dire en paramétrant en z, puis en combinant les lignes:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -z \\ x + y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 3z \end{cases}$$

     D'où, $Ker(f + id) = \{(-2z, 3z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = Vect((-2, 3, 1))$.

- et de la même façon, on peut montrer que $Ker(-2id) = Vect((1,0,1))$.

3. Précédemment, on a réussi à identifier chacun des sous-espaces vectoriels. Pour démontrer qu'on a une telle décomposition de l'espace, on va préférer justifier que les vecteurs $e_0 = (1,-2,1)$, $e_1 = (-2,3,1)$ et $e_2 = (1,0,1)$ désignent une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si c'est une base, on aura une décomposition unique de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ et par définition, la décomposition en somme directe des sous-espaces sous-jacents.
Par exemple, on peut revenir à l'algorithme du rang et échelonner la matrice de ces vecteurs par opérations sur les colonnes :
$$rg(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = rg(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}) = 3$$
Le rang étant maximal, ces vecteurs représentent une base de $\mathbb{R}^3$ et on a immédiatement $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$.

Remarque Cet exercice est fondamental pour plusieurs raisons. D'abord, parce qu'il cache la réduction d'un endomorphisme en dimension finie, au coeur du programme de spé. Puis, de façon plus triviale, il vous permet de retravailler les systèmes linéaires : vous êtes souvent maladroits et préférez échelonner des tableaux de coefficients de façon algorithmique sans comprendre... vous êtes en MP maintenant et la rédaction et les idées sont importantes pour les écrits. Ainsi, je voudrais vraiment que :

1. vous sachiez gérer ces systèmes : pivot de Gauss, combinaison des lignes, choix des paramètres, conclusion

2. vous échelonniez pour de vraies raisons : calcul d'un rang ou d'un déterminant.

Exercice 4

1. On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, et on doit montrer l'égalié de deux ensembles $Im(f) = Im(f^2)$. On procède tout simplement par double inclusion :

   - on a immédiatement $Im(f^2) \subset Im(f)$
   - réciproquement, si $x \in Im(f)$, alors il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ mais par hypothèse sur E, $t = t_1 + f(t_2)$ où $(t_1, f(t_2)) \in Ker(f) \times Im(f)$ et ainsi :
   $$x = f(t) = 0_E + f \circ f(t_2) = f^2(t_2)$$
   ainsi, $Im(f) \subset Im(f^2)$

   D'où l'égalité $Im(f) = Im(f^2)$.

2. (a) On procède ici par double implication :
   - on suppose que $Im(f) = Im(f^2)$, alors en dimension finie, on récupère grâce à la formule du rang :
   $$dim(Ker(f)) = dim(E) - rg(f) = dim(E) - rg(f^2) = dim(Ker(f^2))$$
   or on a toujours l'inclusion $Ker(f) \subset Ker(f^2)$, et ainsi :
   $$\begin{cases} Ker(f) \subset Ker(f^2) \\ dim(Ker(f)) = dim(Ker(f^2)) \end{cases} \Rightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$$
   - réciproquement si on suppose que $Ker(f) = Ker(f^2)$, alors la formule du rang donne encore $rg(f) = rg(f^2)$ et donc :
   $$\begin{cases} Im(f^2) \subset Im(f) \\ dim(Im(f)) = dim(Im(f^2)) \end{cases} \Rightarrow Im(f) = Im(f^2)$$

   Finalement, on a bien l'équivalence cherchée.

   (b) On suppose que $Im(f) = Im(f^2)$, et on cherche à démontrer la décomposition : $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, c'est à dire à l'aide de la caractérisation en dimension finie, il suffit de montrer que :
   $$\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\} \ \ (1) \\ dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \ \ (2) \end{cases}$$
   (2) est immédiat puisqu'on reconnaît ici la formule du rang.

   (1) Considérons $x \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors
   $$f(x) = 0_E \text{ et } \exists\, t \in E,\ x = f(t)$$
   dans ce cas, il vient $f^2(t) = 0_E$ et donc, $t \in Ker(f^2) = Ker(f)$ et ceci grâce à la question précédente.
   Par conséquent, $f(t) = 0_E$ et x est nul. On en déduit que $Ker(f) \cap Im(f) \subset \{0_E\}$ et l'inclusion réciproque étant immédiate, (1) est vraie.

   D'où, $(1) + (2) \Rightarrow E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 5

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$M \in Ker(f) \Leftrightarrow f(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2b + 4d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

Autrement dit, on a deux paramètres de sorte que :

$$Ker(f) = \{\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix},\ c, d \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

En particulier, f n'est pas injective. Comme f désigne un endomorphisme en dimension finie, f n'est pas non plus surjective : on a par exemple $rg(f) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2$.

2. Etant donné les calculs de la quetsion précédente, on a directement pour M quelconque :

$$f(M) = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et ainsi, $Im(f) = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}) = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$.

3. Si on se ramène à la caractérisation d'une telle décomposition en dimension finie, on a toujours par la formule du rang:

$$dim(Ker(f)) + rg(f) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$$

Reste à montrer que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.
Pour cela, on considère $M \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors en utilisant les bases de chacun de ces sous-espaces, il existe des scalaires $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} M = a \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

c'est à dire qu'il vient :

$$\begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a = c \\ a = 2c \\ -2b = d \\ b = 2d \end{cases} \quad \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow M = 0$$

D'où, $Ker(f) \cap Im(f) \subset \{0\}$ et ainsi, l'inclusion réciproque étant immédiate, $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

Finalement, on a bien par caractérisation, $\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \\ dim(Ker(f)) + rg(f) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 6

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, on souhaite en fait montrer que : $I_{p+1} \subset I_p$ et $N_p \subset N_{p+1}$.

   - Soit $x \in I_{p+1}$, alors il existe $t \in E$, $x = f^{p+1}(t)$ et donc, $x = f^p(f(t))$, c'est à dire $x \in I_p$.
   Ainsi, $I_{p+1} \subset I_p$ et la suite des images itérées est décroissante au sens de l'inclusion.
   - Soit $x \in N_p$, alors $f^p(x) = 0_E$ et donc, en composant par f : $f^{p+1}(x) = 0_E$, c'est à dire $x \in N_{p+1}$.
   Ainsi, $N_p \subset N_{p+1}$ et la suite des noyaux itérés est croissante au sens de l'inclusion.

2. La suite des images itérées étant décroissante, on a par passage aux dimensions :

$$dim(I_{p+1}) \leq dim(I_p)$$

En particulier, la suite des dimensions $(dim(I_p))$ est une suite décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente, et comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle est stationnaire, c'est à dire :

$$\exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq p_0,\ dim(I_p) = dim(I_{p_0})$$

Mais alors on a pour tout $p \geq p_0$:

$$\begin{cases} dim(I_p) = dim(I_{p_0}) \\ I_p \subset I_{p_0} \text{ d'après 1.} \end{cases} \quad \Rightarrow I_p = I_{p_0}$$

Pour aller plus loin, on a également par la formule du rang et pour tout $p \geq p_0$:

$$dim(N_p) = dim(E) - dim(I_p) = dim(E) - dim(I_{p_0}) = dim(N_{p_0})$$

Mais alors on a pour tout $p \geq p_0$:

$$\begin{cases} dim(N_p) = dim(N_{p_0}) \\ N_{p_0} \subset N_p \text{ d'après 1.} \end{cases} \Rightarrow N_p = N_{p_0}$$

Autrement dit, la suite des images et des noyaux sont même stationnaires au sens de l'inclusion.

3. Encore une fois, on va invoquer la caractérisation d'une telle décomposition en dimension finie, c'est à dire qu'on montre :

$$\begin{cases} dim(N_{p_0}) + dim(I_{p_0}) = dim(E) \ \ (1) \\ N_{p_0} \cap I_{p_0} = \{0_E\} \ \ (2) \end{cases}$$

(1) est immédiat : c'est la formule du rang appliqué à f^{p_0}.
De plus, si $x \in N_{p_0} \cap I_{p_0}$, alors :

$$f^{p_0}(x) = 0 \text{ et il existe } t \in E \text{ tel que } x = f^{p_0}(t)$$

et donc, $f^{2p_0}(t) = 0_E$. En particulier, cela signifie que $t \in N_{2p_0}$, mais la suite des noyaux étant stationnaire au rang p_0, on a $t \in N_{2p_0} = N_{p_0}$.
D'où, $x = f^{p_0}(t) = 0_E$.
Finalement, $N_{p_0} \cap I_{p_0} \subset \{0_E\}$ et donc, $N_{p_0} \cap I_{p_0} = \{0_E\}$.

On en déduit par caractérisation que $E = N_{p_0} \oplus I_{p_0}$.

Exercice 7

1. On a par définition de la famille de ces polynômes :

$$B_{n,0} = \binom{n}{0} X^0(1-X)^n, \ B_{n,1} = \binom{n}{1} X^1(1-X)^{n-1}, \ B_{n,2} = \binom{n}{2} X^2(1-X)^{n-2} \dots$$

En particulier, on remarque que $Card(B_{n,k}) = n + 1 = dim(\mathbb{R}_n[X])$, et ainsi pour justifier qu'il s'agit d'une base, il suffit de montrer que cette famille est libre.
Considérons alors $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k} = 0 \ \ (*)$$

Par récurrence finie sur $k \in [\![0, n]\!]$, on va montrer que les scalaires sont nuls :

- En évaluant en $X = 0$, on a immédiatement : $\lambda_0.1 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_0 = \ldots = \lambda_k = 0$, alors :

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} B_{n,k+1} + \ldots + \lambda_n B_{n,n} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \binom{n}{k+1} X^{k+1}(1-X)^{n-k-1} + \ldots + \lambda_n \binom{n}{n} X^n (1-X)^0 = 0$$

En simplifiant par X^{k+1}, puis en faisant tendre $X \longrightarrow 0$, on a : $\lambda_{k+1} = 0$. Ce qui livre l'hérédité de la récurrence.

Par le principe de récurrence finie, on en déduit que les scalaires sont nuls et la famille des polynômes de Berstein constitue une famille de $n+1$ vecteurs libres : c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) On a imméditament que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $B(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,

$$B(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)(k/n) B_{n,k} = \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k/n) B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} Q(k/n) B_{n,k} = \lambda B(P) + B(Q)$$

Autrement dit, B est linéaire et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors :

$$P \in Ker(B) \Leftrightarrow B(P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} P(k/n) B_{n,k} = 0$$

mais la famille des polynômes de Berstein étant une base, ils sont linéairement indépendants et on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k/n) = 0$.
Dans ce cas, P possède $n + 1$ racines distinctes, plus que son degré : c'est donc le polynôme nul et $P = 0$.
Finalement, $Ker(B) = \{0\}$, et ainsi B est injective.

Pour finir, comme B désigne un endomorphisme en dimension finie avec $dim(\mathbb{R}_n[X]) = dim(\mathbb{R}_n[X])$, elle est donc aussi bijective par caractérisation des isomorphismes en dimension finie : on peut même conclure qu'il s'agit d'un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque On fera attention : les polynômes de Bernstein ne sont pas échelonnés en degré, et il faut donc prouver la liberté autrement... D'ailleurs, cette famille de polynômes est importante car vous l'avez certainement vu en MPSI, elle permet, pour une fonction f continue sur un segment, de construire une suite de polynômes qui approche f uniformément.