Chapitre 9

Cas particulier des séries entières

Le chapitre précédent était essentiel car il a mis en lumière les suites et séries de fonctions, et leurs applications dans l'étude des intégrales à paramètre. Ici, nous traiterons le cas particulier des séries entières : ce sont des séries de fonctions à la forme simple, et dont les propriétés sont très nombreuses.

Programmes 2022

Pour aller plus loin

Les séries entières reviennent souvent aux écrits, d'autant qu'elles permettent de développer certaines fonctions usuelles sur un domaine précis. C'est très pratique pour faire apparaître des sommes, mais on retiendra surtout leur utilisation dans la recherche des solutions d'une équation différentielle.

1 Premières définitions et convergence d'une série entière

1.1 Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence

Définition On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f_n : z \longmapsto a_n z^n$$

En particulier, on pourra distinguer :

- les **séries entières réelles d'une variable réelle** de la forme $\sum a_n x^n$, avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}$
- les **séries entières complexes d'une variable complexe** de la forme $\sum a_n z^n$, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z \in \mathbb{C}$

De plus, la suite (a_n) désigne la **suite des coefficients de la série entière** et sous réserve d'existence, on appelle encore **somme de la série** la limite simple de cette série de fonctions.

Remarque Encore une fois, la convergence de ces séries de fonctions dépendra souvent du paramètre x ou z... il faudra donc être vigilant sur l'étude du **domaine de convergence simple** de ces séries.

Propriété 1 (deux exemples fondamentaux à valeurs dans $\mathbb{C}$)**.**

On rappelle notamment :

1. La série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

2. La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on a :

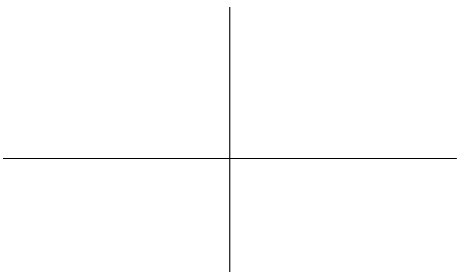
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Théorème 2 (lemme d'Abel)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose de plus qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $(a_n z_0^n)$ est bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

► *On se ramène à une comparaison avec le terme général d'une série géométrique convergente.*

Remarque Ce lemme d'Abel est assez puissant, car la connaissance du terme général en un seul point impose la convergence de la série de fonction sur une grande partie du plan complexe :



Définition Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors d'après le lemme d'Abel,

$$I = \{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

est un intervalle, et il est non vide car il contient au moins 0. Dans ce cas, on appelle **rayon de convergence** de la série la borne supérieure de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est à dire :

- si I est majorée, le rayon de convergence est $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
- si I est non majorée, le rayon de convergence est $R = +\infty$.

De façon abusive, ou pourra écrire que :

$$R = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{r \in \mathbb{R}_+,\ \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

Propriété 3 (conséquences de la définition)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et notons R son rayon de convergence. Alors, sous réserve que ces inégalités aient un sens, on a :

1. pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ est non bornée et donc, la série diverge grossièrement.

► *Il suffit de revenir à la définition du rayon de convergence qui découle du lemme d'Abel...*

Remarques

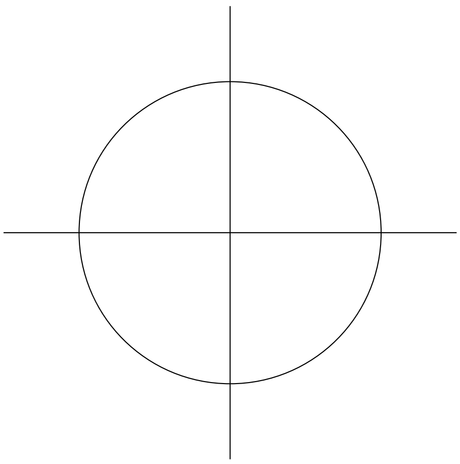
1. Dans le cas particulier où $R = 0$, alors on déduit du second point que la série entière diverge grossièrement pour $|z| > 0$: elle ne converge donc que pour $z = 0$ et il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 0^k = a_0$$

   Heureusement, ces cas sont rares mais il y en a quelques uns...

2. Dans le cas particulier où $R = +\infty$, alors on déduit du premier point que la série entière converge absolument partout, c'est à dire pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. Pour finir, cette première propriété nous permet de représenter la boule ouverte $B(0, R)$, appelée aussi **disque ouvert de convergence simple**, c'est le disque sur lequel la somme de la série entière est bien définie. On pourra retenir que R désigne alors un **point de rupture** dans le comportement de la série entière :



   Bien entendu, il faudra être vigilant sur le cercle d'équation $|z| = R$, car on ne pourra pas rien dire a priori. C'est pour cela, qu'on prendra l'habitude de faire une étude spécifique pour la convergence sur le bord. Et en particulier, on fera très attention :

   - si par exemple, en un point z_0, la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument, alors $|z_0| \leq R$
   - si par exemple, en un point z_0, la série $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement, alors $|z_0| \geq R$

Dans le cas des séries entières d'une variable réelle, on parlera plutôt d'**intervalle ouvert de convergence**.

Exemple 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières définies par :

$$\sum z^n \quad , \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2} \quad , \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$$

puis, préciser la nature de la série sur le bord du disque ouvert de convergence.

2. On considère la série entière réelle définie par :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$$

(a) Montrer que son rayon de convergence est $R = 1$. On note alors $f(x)$ sa somme pour tout $x \in]-1,1[$.

(b) La somme est-elle définie au bord de l'intervalle ?

(c) Etablir que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{2}((\frac{1}{x}\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}) - x\ln(1-x)), \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque On pourra retenir que la règle de D'Alembert est très efficace pour déterminer le rayon de convergence, car lorsque celle-ci peut être utilisée, elle nous fournit naturellement ce **point de rupture** entre la convergence absolue et la divergence grossière. Mais ce n'est pas la seule méthode... on retiendra les propriétés suivantes, tout aussi utiles.

Propriété 4 (comparaison des rayons de convergence).

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe et dont on note R_a et R_b les rayons de convergence.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors on a $R_a \geq R_b$.
2. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

► *Pour le premier point, on montre simplement que $B(0, R_b) \subset B_f(0, R_a)$ de sorte que $R_b \leq R_a$. Pour le second point, il suffit de se ramener à un encadrement de $|a_n|$ à partir d'un certain rang et de conclure grâce au premier point.*

Remarque Ces propriétés sont très pratiques, car elles offrent une alternative au critère de D'Alembert... et on veillera bien à ce que les comparaisons soient faites en module ou avec des termes positifs !

Exemple 2 On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Préciser alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

Propriété 5 (autres interprétations du rayon de convergence).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et notons R son rayon de convergence. Alors,

1. R désigne aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+,\ a_n r^n \longrightarrow 0\}$.
2. R désigne aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+,\ \sum a_n r^n \text{ converge}\}$.
3. R désigne aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+,\ \sum |a_n r^n| \text{ converge}\}$.

► *Tous ces ensembles contenant au moins 0, on peut noter R_0, R_1, R_2 les bornes supérieures de ces ensembles dans $\overline{\mathbb{R}}$ et montrer que $R \geq R_0 \geq R_1 \geq R_2$ puis que $R = R_2$, et ainsi on aura bien les égalités attendues.*

Théorème 6 (de convergence normale d'une série entière)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et de rayon de convergence $R > 0$. Alors,

1. pour tout $r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement, et donc uniformément sur la boule fermée $B_f(0, r)$.
2. plus généralement, elle converge normalement, et donc uniformément sur tout compact $K \subset B(0, R)$.

▶ *Pour le premier point, c'est immédiat car il suffit de majorer le terme général $|a_n z^n|$. Pour le second point, on pourra appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction $z \mapsto |z|$, avant de majorer le terme général.*

Remarque On fera attention à ne pas étendre ce théorème... sans hypothèse supplémentaire, on ne peut pas garantir la convergence normale ou uniforme sur tout le disque de convergence. On peut par exemple considérer la série géométrique $\sum z^n$ de rayon $R = 1$ et pour laquelle on a sur $B(0, 1)$:

$$\|z^n\|_\infty = 1 \;\Rightarrow\; \sum \|z^n\|_\infty \text{ est divergente sur } B(0,1)$$

1.2 Opérations algébriques sur les séries entières

Propriété 7 (somme de deux séries entières)**.**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe et dont on note R_a et R_b les rayons de convergence. En notant R le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum (a_n + b_n) z^n \text{ converge absolument et } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

En particulier, $R \geq \min(R_a, R_b)$.

▶ *C'est immédiat : avec $|z| < \min(R_a, R_b)$, on travaille par linéarité des sommes convergentes.*

Propriété 8 (produit de Cauchy de deux séries entières)**.**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe et dont on note R_a et R_b les rayons de convergence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et en notant R le rayon de convergence de la série $\sum c_n z^n$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum c_n z^n \text{ converge absolument et } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n).(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$$

En particulier, $R \geq \min(R_a, R_b)$.

▶ *C'est immédiat : on reconnaît le produit de deux séries absolument convergentes et ce résultat découle alors du produit de Cauchy vu en début d'année.*

Remarques

1. Attention, cela ne donne pas exactement le rayon de convergence. Il existe des cas particuliers où le rayon de convergence $R > \min(R_a, R_b)$, par exemple si on définit la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_0 = 1, a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$, il vient :
$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C},\ \sum a_n z^n \text{ converge puisque } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 1 - z \text{ et donc, } R_a = +\infty \\ \sum z^n \text{ a pour rayon de convergence } R_b = 1 \end{cases}$$
et le produit de Cauchy nous donne $(1 - z)(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n) = 1$. Cette série constante égale à 1 est de rayon $R = +\infty > \min(R_a, R_b)$.
2. On essaiera de retenir qu'on peut alors obtenir des développements en série entière par opérations sur ces développements en série entière. Cela peut nous donner un moyen de justifier qu'une fonction est DSE sur un intervalle !

Exemple 3 Etablir que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$$

2 Propriétés de la somme d'une série entière

2.1 Continuité et théorème d'Abel radial

Propriété 9 (continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série entière.

1. Alors, la somme de cette série entière est continue sur $B(0, R)$.
2. Si de plus, la série $\sum a_n R^n$ converge absolument, alors la somme est définie sur $B_f(0, R)$ et elle est même continue sur $B_f(0, R)$ et ainsi :

$$\lim_{z \to R} f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k$$

▶ *C'est immédiat : il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de continuité pour les séries de fonctions. Pour le second point, on pourra exhiber une domination globale.*

Théorème 10 (d'Abel radial pour les séries entières d'une variable réelle).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série $\sum a_n R^n$ converge.
Alors, on admet que la série entière de varaiable t, $\sum a_n R^n t^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et ainsi, la somme est continue sur ce segment. En particulier,

$$\lim_{x \to R} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k$$

Remarques

1. On fera très attention à distinguer les propriété 9 et théorème 10 : la première découle immédiatement du théorème de continuité pour les séries de fonctions alors que dans le théorème d'Abel radial, l'hypothèse de convergence est plus faible, ce qui rend la démonstration plus fine.
2. Ce résultat peut même être étendu aux séries entières d'une variable complexe, mais sa démonstration est admise. Par contre, on retiendra surtout qu'il permet de **prolonger certaines égalités sur le bord** de l'intervalle ouvert de convergence.
   Par exemple, on peut facilement établir que :
   $$\forall x \in]-1, 1[,\ \arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
   or en $x = 1$, la série étant convergente, on en déduit que la formule est vraie en 1 et on obtient : $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{1}{2k+1}$.

2.2 Intégration et dérivation d'une série entière

Propriété 11 (rayon de convergence des séries dérivée et primitive).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et de rayon de convergence $R > 0$. Alors,

1. la série entière dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence.
2. la série entière primitive $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a le même rayon de convergence.

▶ *Le second point découlera du premier... En notant R et R' les rayons de convergence de la série entière et de sa série dérivée, on établit que $B(0, R') \subset B_f(0, R)$ puis que $B(0, R) \subset B_f(0, R')$ de sorte que $R = R'$.*

Théorème 12 (d'intégration et de dérivation pour les séries entières).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série entière.

1. f est intégrable sur tout segment inclus dans $]-R, R[$ et on peut intégrer terme à terme de sorte que pour tout $x \in]-R, R[$,
$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$
2. f est dérivable sur $]-R, R[$ et on peut dériver terme à terme de sorte que pour tout $x \in]-R, R[$,
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$
Et plus généralement, f est de classe C^∞ et pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-p+1) a_k x^{k-p}$$

► *A chaque fois, il suffit de vérifier les hypothèses des théorèmes associés pour les séries de fonctions... on utilisera évidemment le résultat précédent car on conserve le même rayon de convergence.*

Corollaire 13 (unicité des coefficients du développement en série entière).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série entière. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
Et ainsi, les coefficients du développement en série entière sont uniques.

► *On utilise la formule de dérivation sur $B(0, R)$ et on évalue en $x = 0$.*

Exemple 4 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$
1. Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, puis établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.
2. En notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, déterminer les coefficients de son développement en série entière.

3 Fonctions développables en série entière

3.1 Définition et développements usuels

Définition On considère f une fonction définie au voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que f est **développable en série entière** en 0 s'il existe un nombre réel $R > 0$ tel que :
$$\forall z \in B(0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ avec } (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Remarques

1. Lorsqu'on travaille avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un intervalle de la forme $]-R, R[$.
La fonction est donc de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et on a encore unicité des coefficients du développement sur $]-R, R[$ de sorte que :
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
D'ailleurs, c'est pour cela que certains peuvent confondre, à tort, avec les développements limités.
2. Attention, si f est développable en série entière, alors elle est de classe C^∞ mais la réciproque est fausse et il existe des fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière en 0. On pourra de nouveau étudier la fonction :
$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

3. Nous avons déjà vu quelques **conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en série entière** :

   convergence du reste intégral dans la formule de Taylor, dérivées uniformément bornées sur un intervalle centré en 0, résultat d'opérations sur les séries entières, théorème de Bernstein...

   mais ce n'est pas toujours simple de justifier qu'une fonction de classe C^∞ est bien DSE. On essaiera donc de retenir quelques exemples de référence qu'on obtient par la formule de Taylor avec reste intégral, les relations avec la fonction exp ou les théorèmes d'intégration/dérivation pour les séries entières :

Corollaire 14 (développements en série entière usuels)**.**

On rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

De plus, on a :

- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

Et par théorème d'intégration pour les séries entières, on a enfin :

- $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ et $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

3.2 Recherche d'un développement en série entière à l'aide d'un problème de Cauchy

Pour finir, et comme pour l'exercice précédent, on reviendra souvent à un **problème de Cauchy** pour déterminer la forme d'un développement en série entière.

Exemple 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On considère le problème de Cauchy défini par :

$$\begin{cases} (1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est solution du problème de Cauchy sur $]-1,1[$.
2. Par analyse-synthèse, montrer qu'il existe une unique série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et dont la somme est solution du problème de Cauchy sur $]-R,R[$.
3. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!}$$

4. Retrouver alors le développement en série entière de arcsin sur $]-1,1[$.

Remarques

1. Dans le cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $(1+x)^\alpha$ désigne une fonction polynôme... elle est évidemment développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et la suite (a_n) qui définit la série entière est à support presque nulle. Et dans ce cas, le rayon de convergence est évidemment infini.

2. On pourra parfois écrire de manière abusive que pour tout $x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$: on peut alors voir une **forme généralisée du binôme de Newton**.

3. La recherche de solutions d'une équation différentielle linéaire sous la forme d'un DSE est même une vraie stratégie pour la résolution des équations différentielles...
En effet, le **théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire** nous permet en outre de justifier la structure affine des solutions d'une telle équation sur un intervalle où l'équation peut s'écrire sous forme résolue :
$$S = S_0 + f_p$$
Pour les expliciter, on commencera souvent par déterminer des solutions du système fondamental de solutions sous la forme de fonctions DSE et ceci en procédant par analyse-synthèse.