Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Ce chapitre est fondamental, car il prolonge naturellement l'étude des suites et séries en ajoutant simplement un paramètre : il s'agira donc de bien comprendre les différents modes de convergence et toutes les propriétés qui peuvent être conservées par passage à la limite. Ce sera là l'occasion de mettre en avant le théorème de convergence dominée, admis au programme, et qui nous permettra d'échanger les symboles ou d'étudier des intégrales à paramètre.

Programmes 2022

Pour aller plus loin
Si ce chapitre est fondamental en analyse, c'est aussi parce qu'il nous offre de beaux sujets de concours et de belles applications sur le plan des mathématiques : du cas particulier des séries entières aux transformées usuelles (transformée de Laplace, transformée de Fourier...), beaucoup de ces résultats dépendent directement des théorèmes obtenus sur les suites et séries de fonctions.

1 Suites et séries de fonctions

Dans toute cette partie, X désigne une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie dont on notera $\|.\|$ une norme sur F. Et s'il n'y a pas d'indication contraire, toutes les fonctions seront définies sur X à valeurs dans F.

1.1 Quelques définitions et premiers exemples

Définition Soit X un ensemble. On appelle **suite de fonctions** (f_n) définies sur X toute suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow F$. On dit alors qu'une telle suite (f_n) **converge simplement sur** X s'il existe une fonction f définie sur X telle que:

$$\forall\, x \in X,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ , c'est à dire que pour tout } x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette fonction limite f est aussi appelée la **limite simple** de la suite de fonctions (f_n).

Remarque On fera attention : il s'agit bien de la limite de $f_n(x)$ à x fixé dans X, et il ne sera donc pas rare d'obtenir des limites simples **définies par morceaux** en fonction des valeurs prises par x. C'est pour cette raison que dans les théorèmes de convergence donnés au programme, la classe des fonctions étudiées est aussi celle des fonctions continues par morceaux.

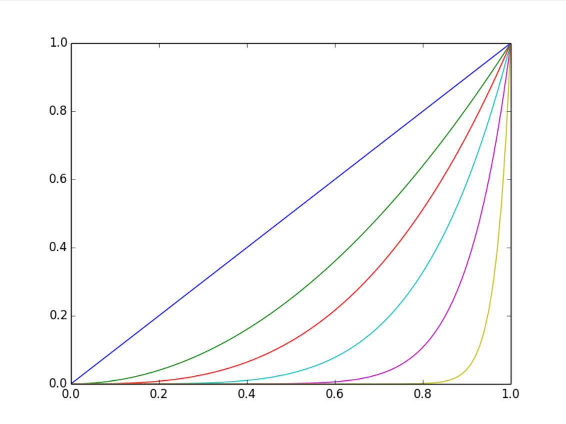
Dans les cas des suites de fonctions à valeurs réelles, on peut facilement illustrer la convergence simple en Python : pour cela, on pourra prendre soin de représenter des fonctions f_n pour des valeurs de n bien choisies.

Exemple 1

1. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = x^n$$

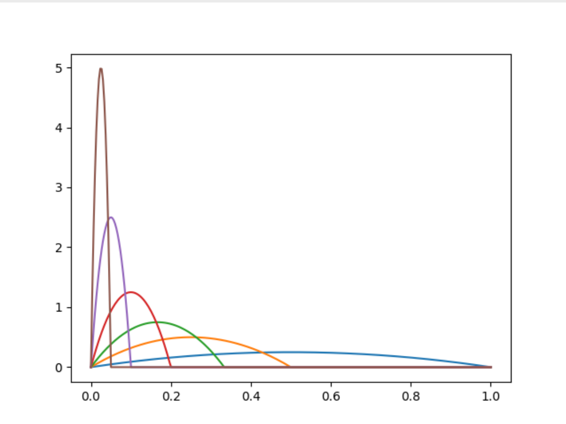
En fonction des valeurs de x, déterminer la limite de $f_n(x)$ quand $n \to +\infty$ puis définir f la limite simple de la suite (f_n). On peut en effet illustrer la convergence simple de la **suite des monômes** sur $[0, 1]$ et ainsi, on retiendra :



2. On considère la suite de fonctions (g_n) définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx), \text{ si } 0 \le x \le 1/n \\ 0, \text{ si } x > 1/n \end{cases}$$

En fonction des valeurs de x, déterminer la limite de $g_n(x)$ quand $n \to +\infty$ puis définir g la limite simple de la suite (g_n). On peut en effet illustrer la convergence simple de la **suite des pics mobiles** sur $[0, 1]$ et ainsi, on retiendra :



Propriété 1 (de la norme infinie sur l'espace des fonctions bornées).

Soit X un ensemble. On note $B(X,F)$ l'espace des fonctions bornées sur X et à valeurs dans F, et pour toute fonction $f \in B(X,F)$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$

Alors,

1. la norme infinie $\|.\|_\infty$ définit encore une **norme** sur $B(X,F)$.
2. muni de la norme $\|.\|_\infty$, $(B(X,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

► *On revient à la définition d'une norme. Pour le second point, on pourra vérifier qu'il s'agit d'un sev de $\mathcal{F}(X,F)$.*

Remarque La norme infinie $\|.\|_\infty$ sera aussi appelée la norme uniforme, car elle nous permet de définir la notion de convergence uniforme sur un ensemble donné.

Définition Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On dit alors qu'une telle suite (f_n) **converge uniformément sur** X s'il existe une fonction f telle que :

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette fonction limite f est aussi appelée la **limite uniforme** de la suite de fonctions (f_n).

Propriété 2 (la convergence uniforme entraîne la convergence simple).

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On suppose de plus que (f_n) converge uniformément sur X vers une fonction f.
Alors, (f_n) converge simplement vers f.

► *Il suffit de majorer la différence $\|f_n(x) - f(x)\|$ à x fixé dans X avant de passer à la limite quand $n \to +\infty$.*

Remarque Cette dernière propriété nous permet d'affirmer que limite uniforme et limite simple coïncident. On procèdera alors de la façon suivante pour étudier la convergence d'une suite de fonctions :

1. on commence par déterminer la limite simple éventuelle, à x fixé dans X ;
2. puis, on vérifie si (f_n) converge uniformément vers cette limite soit :
   - en étudiant l'application $x \mapsto f_n(x) - f(x)$ pour en obtenir la norme infinie sur le domaine d'étude. Ce sera souvent le cas pour les fonctions à valeurs réelles.
   - en cherchant à majorer la différence $\|f_n(x) - f(x)\|$ par une suite (α_n) de limite nulle et indépendante de x. Dans ce cas, il vient :

   $$\forall\, x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \alpha_n \Rightarrow 0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   et par encadrement, la convergence est uniforme.

La convergence simple dépend évidemment du point x en lequel on étudie le comportement asymptotique. Pour la convergence uniforme, on fera attention... celle-ci ne dépend plus de x, mais elle est quand même liée indirectement au domaine de travail et ainsi, on notera parfois :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{CS} f & \text{pour dire que } (f_n) \text{ converge simplement vers } f \\ f_n \xrightarrow{CU} f & \text{pour dire que } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \\ f_n \xrightarrow{CU,X} f & \text{pour préciser que } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X \end{cases}$$

Exemple 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier alors la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite converge uniformément sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[,\ a > 0$.

1.2 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Propriété 3 (de la limite simple dans le cas particulier des fonctions à valeurs réelles)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I et à valeurs réelles. On suppose de plus que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f. Alors :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp. décroissante), alors f est aussi croissante (resp. décroissante) ;
2. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe (resp. concave), alors f est aussi convexe (resp. concave).

▶ *On traduit les propriétés des fonctions f_n avant de passer à la limite quand $n \to +\infty$.*

Remarque Malheureusement, le passage à la limite simple ne nous permet pas de conserver la régularité : on pourra revenir à la suite des monômes tous continus sur $[0, 1]$, mais dont la limite simple est définie sur $[0, 1]$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{et donc, qui n'est pas continue sur } [0,1].$$

Ainsi, on veillera à aller chercher des modes de convergence plus forts pour pouvoir invoquer les propriétés suivantes.

Propriété 4 (continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions)**.**

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X,
- (f_n) converge uniformément sur X vers une fonction f.

Alors, f est encore continue sur X.

▶ *Fixons $a \in X$. On se ramène à la définition de la limite en montrant que $f(x) \longrightarrow f(a)$ quand $x \to a$.*

Remarques En fait, la continuité en un point est **une propriété locale**. On peut alors adapter la preuve précédente et ne travailler qu'autour du point a fixé. Ainsi, on se contentera le plus souvent d'avoir la convergence uniforme sur tout compact K inclus dans X, et on retiendra le théorème suivant, plus utile dans la pratique :

Propriété 5 (continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions avec des hypothèses locales)**.**

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X,
- (f_n) converge uniformément sur tout compact $K \subset X$ vers une fonction f.

Alors, f est encore continue sur X.

Théorème 6 (de la double limite)**.**

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X, a un point adhérent à X. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda_n$,
- (f_n) converge uniformément sur X vers une fonction f.

Alors, on admet que (λ_n) **possède une limite finie** λ et ainsi, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda$ de sorte que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lambda_n, \text{ c'est à dire que : } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Remarque Ce théorème généralise le théorème de continuité aux points $a \in \overline{X}$... et il sera très utile pour connaître la limite en un point adhérent de la limite uniforme d'une suite de fonctions. Malheureusement, il est admis car la preuve repose sur les **espaces complets** : des espaces sur lesquels toute suite de Cauchy est connvergente... c'est évidemment le cas ici puisque F est un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 7 (d'intégration de la limite uniforme d'une suite de fonctions définies sur un segment).

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$,
- (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to +\infty$ de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

▶ *On note $I_n = \int_a^b f_n(t)\,dt$ et on majore la différence $\|I_n - \int_a^b f(t)\,dt\|$ grâce aux propriétés de l'intégrale.*

Remarque Il s'agit là d'un théorème fondamental nous permettant de passer à la limite sous le signe intégral, mais attention aux limites de ce résultat : celui-ci suppose une convergence assez forte et il n'est valable que sur un segment... il ne pourra donc pas être utilisé avec des intégrales généralisées et on préfèrera souvent faire appel au **théorème de convergence dominée**.

Exemple 3 On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = x(1+\sqrt{n}e^{-nx})$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une limite f qu'on déterminera.
2. En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de :
$$I_n = \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,dx$$

Corollaire 8 (dérivation de la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f,
- (f_n') converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers une fonction g.

Alors, f est encore de classe C^1 sur I et on a $f' = g$.

▶ *Fixons $a \in I$, alors $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration des suites de fonctions définies sur un segment.*

Remarques

1. On peut aussi retenir que la dérivée de la limite n'est rien d'autre que la limite de la dérivée... et c'est là encore une façon d'échanger les symboles.
2. Avec ces hypothèses, **on récupère même la convergence uniforme sur tout segment** $[a,b]$ de la suite (f_n) vers f. En effet, on a pour tout $x \in [a,b] \subset I$:
$$f_n(x) - f(x) = f_n(a) - f(a) + \int_a^x f_n'(t) - f'(t)\,dt \Rightarrow\ 0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n(a) - f(a)\| + (b-a)\|f_n' - f'\|_\infty \longrightarrow 0$$
Cette conséquence nous permet en outre de généraliser ce résultat aux suites de fonctions de classe C^k :

Corollaire 9 (critère C^k pour la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I,
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f, et que pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I,
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$ vers une fonction g_k.

Alors, f est encore de classe C^k sur I et on a $f^{(k)} = g_k$.

1.3 Cas particulier des séries de fonctions

Définition Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On appelle **série de fonctions** toute série de la forme $\sum f_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow F$.
On note encore pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
Alors, on dit que :

- la série $\sum f_n$ **converge simplement** sur X s'il existe une fonction S telle que (S_n) converge simplement sur X vers S, c'est à dire :
$$\forall\, x \in X,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S(x) \text{ , c'est à dire que pour tout } x \in X,\ \|S_n(x) - S(x)\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
- la série $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I s'il existe une fonction S telle que (S_n) converge uniformément sur X vers S, c'est à dire :
$$\|S_n - S\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \|R_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Définition Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Théorème 10 (lien entre les différents modes de convergence).

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On suppose de plus que la série $\sum f_n$ est normalement convergente, alors il existe une fonction S telle que (S_n) converge uniformément sur X vers S.

Autrement dit, la convergence normale entraîne la converge uniforme, qui entraîne la convergence simple.

► *On montre d'abord que la série converge absolument pour justifier l'existence de la limite simple, puis on cherche à encadrer le reste partiel pour prouver la convergence uniforme.*

Remarques

1. Il s'agit d'un théorème fort pratique car il donne la convergence uniforme d'une série de fonctions sans être obligé d'en déterminer sa limite. D'ailleurs, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est une série à valeurs positives, et cela nous permettra de retrouver tous les critères d'étude des séries numériques.

2. L'étude d'une série de fonctions se ramène donc à l'étude de la suite de fonctions (S_n) : on peut alors réécrire tous les résultats vus précédemment.

Propriété 11 (continuité de la limite uniforme d'une série de fonctions).

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X,
- $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers une fonction S.

Alors, S est encore continue sur X.

Propriété 12 (continuité de la limite uniforme d'une série de fonctions avec des hypothèses locales).

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X,
- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact $K \subset X$ vers une fonction S.

Alors, S est encore continue sur X.

Théorème 13 (de la double limite).

Soient X un ensemble et (f_n) une suite de fonctions définies sur X, a un point adhérent à X. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda_n$,
- $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers une fonction S.

Alors, on admet que $\sum \lambda_n$ **possède une limite finie** $\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k$ et ainsi, $S(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda$ de sorte que :

$$\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k, \text{ c'est à dire que : } \lim_{x \to a} S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_k(x)$$

On retrouve ici **la fonction zêta de Riemann**, et on essaiera de retenir ces questions classiques...

Exemple 4 On considère la fonction ζ définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

et pour tout $k \geq 1$, on note $f_k : x \longmapsto 1/k^x$.

1. Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$, puis préciser ses variations sur $]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$. Etablir que $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. En déduire que : $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.
3. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \dfrac{1}{x-1} + 1$.
4. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \to 1$, puis construire sa courbe représentative sur $]1, +\infty[$.

Théorème 14 (d'intégration terme à terme pour une série de fonctions définies sur un segment).

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction S.

Alors, $\displaystyle\int_a^b S_n(t)\, dt$ tend vers $\displaystyle\int_a^b S(t)\, dt$ quand $n \to +\infty$ de sorte que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt$$

Remarque Il s'agit là d'un théorème fondamental nous permettant d'échanger les symboles $\sum$ et $\int$, mais attention aux limites de ce résultat : celui-ci suppose une convergence assez forte et il n'est valable que sur un segment... il ne pourra donc pas être utilisé avec des intégrales généralisées et on préfèrera souvent faire appel au **théorème de convergence dominée** appliqué aux sommes partielles ou au **théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue**.

Exemple 5 Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$. En déduire que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2(n+1)}$$

Corollaire 15 (dérivation de la limite d'une série de fonctions définies sur un intervalle).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,
- $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S,
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers une fonction T.

Alors, S est encore de classe C^1 sur I et on a $S' = T$ de sorte que :

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Remarques

1. Encore une fois, on retrouve ici un résultat qui nous permet l'échange... la dérivée de la somme n'est rien d'autre que la somme des dérivées.
2. Avec ces hypothèses, on rappelle qu'on récupère même la convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de la série $\sum f_n$ vers S. Cette conséquence nous permet en outre de généraliser ce résultat aux séries de fonctions de classe C^k :

Corollaire 16 (critère C^k pour la limite d'une série de fonctions définies sur un intervalle).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I,
- $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S, et que pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I,
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers une fonction T_k.

Alors, S est encore de classe C^k sur I et on a $S^{(k)} = T_k$ de sorte que :

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Exemple 6 On considère encore la fonction ζ définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

et pour tout $k \geq 1$, on note $f_k : x \longmapsto 1/k^x$.

1. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que ζ est convexe sur $]1,+\infty[$, puis retrouver l'allure de sa courbe représentative.

2 Les théorèmes de convergence de Lebesgue

Dans tout cette partie, on ne considèrera que des fonctions d'une variable réelle définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on supposera qu'elles sont à chaque fois **continues par morceaux** sur I, c'est à dire continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

2.1 Le théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme

Conformément au programme, on admet les deux théorèmes suivants :

Théorème 17 (de convergence dominée)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose de plus que :

- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \phi \quad \text{(indépendante de } n)$$

Alors, f est intégrable sur I et $\int_I f_n(t)\, dt$ tend vers $\int_I f(t)\, dt$ quand $n \to +\infty$ de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt$$

Remarques

1. Il s'agit d'abord d'un résultat d'intégrabilité, car il nous donne un moyen de justifier l'existence de l'intégrale $\int_I f(t)\, dt$ avant de la calculer.
2. Il n'est pas nécessaire de vérifier l'intégrabilité des fonctions f_n : elle est assurée par l'hypothèse de domination. D'ailleurs, on veillera à ce que la fonction ϕ, majorante et parfois définie par morceaux, soit bien **indépendante du paramètre** donné.
3. Pour finir, ce théorème est d'abord un résultat asymptotique : on pourra donc se contenter d'une domination des modules à partir d'un certain rang.

Exemple 7 On considère l'**intégrale de Gauss** définie par :

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt$$

et on définit la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} (1 - \dfrac{t^2}{n})^n, \text{ pour } t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $t \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puis à l'aide de la suite de fonctions (f_n), retrouver la valeur de I.

Remarque En fait, le théorème de convergence dominée peut aussi être utilisé **dans le cadre des séries de fonctions**. Il suffit de vérifier les hypothèses pour la suite des sommes partielles (S_n), et ainsi on pourra échanger les symboles $\sum$ et $\int$ puisque dans ce cas, on a $\int_I S_n \longrightarrow \int_I S$, qui peut aussi s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_I f_k(t)\, dt \ \longrightarrow\ \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt \ \Leftrightarrow\ \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t)\, dt = \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt$$

C'est très pratique, mais il faut pouvoir dominer les sommes partielles.

Exemple 8

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-n}$ est convergente.
2. Montrer que $t \mapsto t^{-t}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$, et en déduire l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\, dt$$

Théorème 18 (d'intégration terme à terme de Lebesgue).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose de plus que :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux sur I,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I et la série $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ est convergente.

Alors, S est intégrable sur I et $\int_I S_n(t)\, dt$ tend vers $\int_I S(t)\, dt$ quand $n \to +\infty$ de sorte que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t)\, dt = \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt$$

Exemple 9 On considère l'intégrale définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\, dt$$

et on rappelle que pour tout $x > 1$, on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p = p!\zeta(p+1)$$

Remarque Finalement, pour intégrer terme à terme une série de fonctions intégrables sur un intervalle, et échanger les symboles $\sum$ et $\int$, on pourra procéder de cinq façons :

- soit on est dans le cas particulier d'un segment $[a, b]$, et dans ce cas, il suffit d'établir la convergence uniforme de la série de fonctions.
- soit on établit la convergence simple de la série de fonctions et on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq \phi$, avec ϕ continue par morceaux et intégrable sur I. On conclut alors par le théorème de convergence dominée appliqué à la suite (S_n).
- soit on établit la convergence simple de la série de fonctions et on prouve que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ est convergente. On conclut alors à l'aide du théorème précédent.

mais on pourra aussi dans certains cas particuliers faire ces échanges, c'est notamment le cas lorsque :

- on reconnaît une série entière en la variable d'intégration (c'est important !) et sur un un segment $[a, b]$ inclus dans le domaine de convergence. Il suffit alors d'invoquer la convergence uniforme sur $[a, b]$ avant d'échanger les symboles.
- on reconnaît une série de fonctions alternées : on a pour n fixé, $\int_I S = \int_I S_n + \int_I R_n$ et on peut établir que le reste intégral est négligeable par majoration du reste partiel. Il suffit alors de transformer la première intégrale par linéarité avant de passer à la limite.

2.2 Application à l'étude des intégrales à paramètre

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimenson finie dont on notera $\|.\|$ une norme sur E.

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, X une partie de E. On appelle **intégrale à paramètre** toute intégrale de la forme :

$$F(x) = \int_I f(x, t)\, dt$$

où f désigne une application de $X \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et telle que $f(x, .) : t \longmapsto f(x, t)$ soit continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$.

Remarques

1. La première difficulté de ces intégrales réside dans leur définition, et il s'agira d'abord de déterminer pour quelles valeurs du paramètre x l'intégrale est convergente.
2. Au programme du concours, le paramètre peut donc être vectoriel... Si la plupart du temps, on travaille avec un paramètre réel, on pourra si besoin étendre les résultats établis aux intégrales de la forme :

$$\int_I f(x_1, \ldots, x_n, t)\, dt \text{ avec } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 19 (de continuité des intégrales à paramètre)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, X une partie de E et $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x, .)$ soit continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$. On suppose de plus que :

- la fonction $f(., t) : x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur X pour tout $t \in I$,
- il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\, (x, t) \in X \times I,\ |f(x, t)| \leq \phi(t) \quad \text{(indépendante de } x\text{)}$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x, t)\, dt$ est continue sur X.

► *Fixons $a \in X$ et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$. On se ramène à la caractérisation séquentielle de la limite en montrant que $F(x_n) \longrightarrow F(a)$ à l'aide du théorème de convergence dominée.*

Remarques

1. La majoration par ϕ nous donne aussi l'intégrabilité de $f(x, .)$ sur I, et ceci pour tout $x \in X$... On veillera donc à ce que la majoration soit encore **indépendante du paramètre** donné même si la plupart du temps, l'intégrabilité aura déjà été étudiée.

2. La continuité en un point étant une propriété locale, on peut encore affaiblir les hypothèses de domination et se contenter de vérifier la domination sur tout compact K inclus dans X. Ainsi on préfèrera retenir le théorème avec des hypothèses locales :

Théorème 20 (de continuité des intégrales à paramètre avec des hypothèses locales)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, X une partie de E et $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x, .)$ soit continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$. On suppose de plus que :

- la fonction $f(., t) : x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur X pour tout $t \in I$,
- pour tout compact $K \subset X$, il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\, (x, t) \in K \times I,\ |f(x, t)| \leq \phi(t) \quad \text{(indépendante de } x\text{)}$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x, t)\, dt$ est continue sur X.

Remarque Pour les fonctions d'une variable réelle, on pourra même affiner le choix du compact K sur lequel on travaillera. Et ainsi, pour le reste du chapitre, on pourra prendre l'habitude suivante :

- si f est définie sur un intervalle centré en 0, on cherchera plutôt à obtenir une majoration sur un intervalle de la forme $[-a, a] \subset X$,
- sinon, on pourra travailler sur un intervalle de la forme $[a, b] \subset X$.

Exemple 10 On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f, puis déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0, x > 0$.

Théorème 21 (de dérivation des intégrales à paramètre réel).

Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x, .)$ soit continue par morceaux et **intégrable** sur I pour tout $x \in X$. On suppose de plus que :

- la fonction $f(., t) : x \longmapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur X pour tout $t \in I$, avec :

$$\begin{cases} t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \text{ pour tout } x \in X \\ \\ x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue sur } X \text{ pour tout } t \in I \end{cases}$$

- il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in X \times I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \phi(t) \quad \text{(indépendante de } x\text{)}$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\ dt$ est de classe C^1 sur X et sa dérivée est donnée par : $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$.

► *Fixons $a \in X$ et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$. On se ramène à la caractérisation séquentielle de la limite en montrant que le taux d'accroissement $(F(x_n) - F(a))/(x_n - a)$ tend bien vers la dérivée souhaitée.*

Remarques

1. L'intégrabilité de $f(x, .)$ sur I n'est pas immédiate ici et il faudra la vérifier avec soin... mais encore une fois, elle est souvent étudiée pour l'existence de l'intégrale, et avant même de s'intéresser à sa régularité.
2. On prouve en fait la dérivabilité de F. Le caractère C^1 découle simplement du théorème de continuité des intégrales à paramètre appliqué à la dérivée partielle de f par rapport à x.
3. La dérivabilité en un point étant une propriété locale, on peut encore affaiblir les hypothèses de domination et se contenter de vérifier la domination sur tout compact K inclus dans X. Ainsi on préfèrera retenir le théorème avec des hypothèses locales :

Théorème 22 (de dérivation des intégrales à paramètre réel avec des hypothèses locales).

Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x, .)$ soit continue par morceaux et **intégrable** sur I pour tout $x \in X$. On suppose de plus que :

- la fonction $f(., t) : x \longmapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur X pour tout $t \in I$, avec :

$$\begin{cases} t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \text{ pour tout } x \in X \\ \\ x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue sur } X \text{ pour tout } t \in I \end{cases}$$

- pour tout compact $K \subset X$, il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in K \times I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \phi(t) \quad \text{(indépendante de } x\text{)}$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\ dt$ est de classe C^1 sur X et sa dérivée est donnée par : $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$.

Exemple 11 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt$.

1. Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, puis justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) + f^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$;
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$.

Corollaire 23 (critère C^k des intégrales à paramètre réel avec des hypothèses locales)**.**

Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x,.)$ soit continue par morceaux et **intégrable** sur I pour tout $x \in X$. On note $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose de plus que :

- la fonction $f(.,t) : x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur X pour tout $t \in I$, avec pour tout $j \in [\![1,k]\!]$:
$$\begin{cases} t \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \text{ pour tout } x \in X \\ \\ x \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \text{ est continue sur } X \text{ pour tout } t \in I \end{cases}$$
- pour tout compact $K \subset X$, il existe des fonctions $\phi_1, \dots, \phi_k : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues par morceaux et intégrables sur I telles que pour tout $j \in [\![1,k]\!]$:
$$\forall\ (x,t) \in K \times I,\ |\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)| \leq \phi_j(t)$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\, dt$ est encore de classe C^k sur X et sa dérivée k-ième est : $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\, dt$.

3 Quelques exemples d'application au programme

3.1 Etude de la fonction Γ

Exemple 12 On appelle **fonction gamma** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etablir que Γ est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et préciser l'expression de sa dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer qu'il existe un unique $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$, puis justifier que Γ est convexe.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Gamma(x+1)$, puis en déduire un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x \to 0, x > 0$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$, puis en déduire la limite de $\Gamma(x)$ quand $x \to +\infty$.
6. Calculer enfin $\Gamma(1/2)$, puis construire sa courbe représentative sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.2 Transformée de Laplace et résolution d'un problème de Cauchy

Exemple 13 On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et pour tout $f \in E$, on définit sa **transformée de Laplace** par :

$$\mathcal{L}(f) : p \in]0,+\infty[\longmapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt$$

1. Justifier que pour tout $p > 0$, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p)$ est bien définie, puis établir que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
2. On pose $g : t \in [0,+\infty[\longmapsto \displaystyle\int_0^t f(u) e^{-u}\, du$. Prouver que $g \in E$, puis montrer que $\mathcal{L}$ est injective.
3. Calculer les transformées de Laplace des fonctions :
$$f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 1\ ,\ g : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sin(at),\ a \in \mathbb{R},\ h : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \cos(at),\ a \in \mathbb{R}$$
4. On suppose de plus que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, les expressions de $\mathcal{L}(f')(p)$ et $\mathcal{L}(f'')(p)$ en fonction de p et $\mathcal{L}(f)(p)$.
5. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'' + y = \sin(2t) \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

3.3 Transformée de Fourier de la loi normale

Exemple 14 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $t \longmapsto tf(t)$ et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. A l'aide du théorème fondamental de l'analyse, établir que $f(x)$ possède nécessairement une limite nulle quand $x \to \pm\infty$.

2. On appelle alors **transformée de Fourier** de f l'intégrale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}_f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\, dt$$

   (a) Vérifier que cette intégrale est bien convergente.

   (b) Montrer que $\mathcal{F}_f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$\mathcal{F}_{f'}(x) = -ix\mathcal{F}_f(x)$$

3. On considère la fonction $g : t \longmapsto e^{-t^2/2}$ et on rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \sqrt{2\pi}$.

   Justifier que g satisfait les hypothèses précédentes et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_g(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$.