Chapitre 7

Espaces vectoriels normés et propriétés topologiques

En début d'année, nous avons travaillé sur la notion d'espaces vectoriels normés. Dans ce chapitre, il s'agit d'aller plus loin et d'étudier les applications définies sur un espace vectoriel normé à valeurs dans un espace vectoriel normé.
Cela nous donnera l'occasion de définir les parties ouvertes ou fermées qui définissent la topologie d'un tel espace. Si ces notions peuvent être difficiles, on veillera à en comprendre l'intérêt dans l'étude des applications continues et les nombreux théorèmes qui leur sont associés.

Programmes 2022

Pour aller plus loin
Ce n'est pas un chapitre long, mais plutôt technique : on pourra alors retenir quelques théorèmes fondamentaux et utiles pour les exercices d'oraux, et on essaiera surtout de voir comment la dimenson finie nous permet encore de simplifier à chaque fois l'étude de nos opérateurs linéaires.

1 Topologie d'un espace vectoriel normé et étude locale

1.1 Premières définitions

On se place dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$, c'est à dire une application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{cases} \|.\| \text{ vérifie la condition de séparation} \\ \text{elle est homogène} \\ \text{elle vérifie l'inégalité triangulaire} \end{cases}$$

De plus, on rappelle qu'on appelle **boule ouverte centrée en** $a \in E$ **et de rayon** $r > 0$ et **boule fermée centrée en** $a \in E$ **et de rayon** $r > 0$ les sous-ensembles :

$$B(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| < r\} \text{ et } B_f(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leq r\}$$

Définition Soit U une partie non vide de E. On dit que U est un **ouvert** ou désigne une **partie ouverte** de E si U contient un voisinage de chacun de ces points, c'est à dire :

$$\forall\, a \in U,\ \exists\, r > 0,\ B(a,r) \subset U$$

Remarques

1. En fait, on va chercher ici à généraliser quelques résultats obtenus pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles et prolonger correctement les notions de limite, continuité, continuité uniforme pour des applications définies sur un espace vectoriel normé.

2. Par contre, la notion d'ouvert dépendra de l'espace vectoriel considéré : par exemple, dans $\mathbb{R}$ les intervalles ouverts de la forme $]a,b[$ sont évidemment des ouverts, mais dans $\mathbb{C}$, ces mêmes intervalles ne sont pas ouverts !

Propriété 1 (la boule ouverte désigne une partie ouverte)**.**

Soient $a \in E, r > 0$ et considérons la boule $B(a,r)$. Alors, $B(a,r)$ désigne une partie ouverte de E.

► *Les boules étant convexes, on peut faire un dessin et considérer pour tout $x \in B(a,r)$ la boule $B(x, \frac{1}{2}(r - \|x-a\|)) \subset B(a,r)$.*

Propriété 2 (opérations sur les parties ouvertes)**.**

Par convention, $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes. De plus,

1. toute réunion quelconque de parties ouvertes est toujours ouverte.
2. une intersection finie de parties ouvertes est ouverte.

► *Pour ces deux points, on veillera à construire une boule ouverte incluse encore dans la partie considérée.*

Remarque Attention, l'intersection quelconque de parties ouvertes n'est pas nécessairement ouverte. On peut considérer :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\} \text{ qui n'est pas ouverte dans } \mathbb{R}$$

Définition Soit F une partie non vide de E. On dit que F est un **fermé** ou désigne une **partie fermée** de E si son complémentaire ${}^C F$ dans E est ouvert.

Remarque Attention, ce n'est pas parce qu'une partie n'est pas fermée qu'elle est ouverte... par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Propriété 3 (la boule fermée désigne une partie fermée)**.**

Soient $a \in E, r > 0$ et considérons la boule $B_f(a,r)$. Alors, $B_f(a,r)$ désigne une partie fermée de E.

► *Les boules étant convexes, on peut faire un dessin et considérer pour tout $x \notin B_f(a,r)$ la boule ouverte $B(x, \frac{1}{2}(\|a-x\| - r)) \subset^C B_f(a,r)$.*

Propriété 4 (opérations sur les parties fermées).

Par convention, $\emptyset$ et E sont des parties fermées. De plus,

1. toute intersection quelconque de parties fermées est toujours fermée.
2. une réunion finie de parties fermées est fermée.

► *C'est immédiat : on passe au complémentaire dans E et on retrouve les propriétés sur les parties ouvertes de E.*

Remarque Attention, la réunion quelconque de parties fermées n'est pas nécessairement fermée. On peut considérer :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-1+1/n, 1-1/n] =]-1,1[\text{ qui n'est pas fermée dans } \mathbb{R}$$

Propriété 5 (caractérisation séquentielle des fermés).

Soit F une partie non vide de E. Alors, F est une partie fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente de limite x, alors $x \in F$.

► *On procède par double implication. Pour le sens direct, on peut raisonner par l'absurde et supposer que $x \in {}^{C}F$ ouvert dans E. Pour le sens réciproque, on raisonne encore par l'absurde.*

Remarques

1. Cette propriété est très pratique : ainsi, par passage à la limite dans les inégalités, on retrouve facilement que toute boule fermée ou sphère sont fermées dans E.
2. Si des normes sont équivalentes, alors la caractérisation séquentielle est donc indépendante du choix de la norme et ainsi, on pourra retenir que ces notions toplogiques ne dépendront pas du choix de la norme lorsque celles-ci sont équivalentes. Ce sera évidemment le cas des espaces vectoriels de dimension finie.

   D'ailleurs, dans ce cas particulier, on aura aussi un autre résultat fort utile :

Propriété 6 (des sous-espaces vectoriels en dimension finie).

On suppose que E est de dimension finie, et on note F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est une partie fermée de E.

► *On construit une base de F qu'on complète en une base de E, puis en revenant à la caractérisation séquentielle et en utilisant la norme infinie, on montre que $\ell \in F$.*

Remarque En particulier, E étant lui-même un sous-espace vectoriel de E, on retiendra que tout espace vectoriel de dimension finie est fermée. Par exemple, on retiendra que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé, mais aussi $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$... sont fermés.

Définition Soit A une partie non vide de E et considérons $a \in E$.

- On dit que a est un **point intérieur à** A qu'on note $a \in \overset{\circ}{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$B(a,r) \subset A$$

- On dit que a est un **point adhérent à** A qu'on note $a \in \overline{A}$ si pour tout $r > 0$,

$$B(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

  c'est à dire que toute boule ouverte centrée en a rencontre nécessairement A.

- On dit que a est un **point à la frontière de** A si a est un point adhérent à A, mais sans être à l'intérieur de A, et ainsi la **frontière** de A n'est rien d'autre que :

$$Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$$

Propriété 7 (caractérisation séquentielle des points adhérents).

Soit A une partie non vide de E et considérons $a \in E$. Alors, $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

► *On procède encore par double implication. Pour le sens direct, il suffit de prendre $r = 1/n$ pour construire une telle suite de points de A convergente. Pour le sens réciproque, il suffit on traduit la convergence avec $\epsilon = r/2 > 0$, où r désigne le rayon de la boule considérée.*

Propriété 8 (interprétation topologique de l'intérieur et de l'adhérence d'une partie).

Soit A une partie non vide de E.

1. L'ensemble des points intérieurs à A est le plus grand ouvert de E inclus dans A : il est appelé **intérieur** de A et il sera encore noté $\overset{\circ}{A}$.
2. L'ensemble des points adhérents à A est le plus petit fermé de E contenant A : il est appelé **adhérence** de A et il sera encore noté $\overline{A}$.

► *A chaque fois, il suffit de procéder en trois temps : par exemple, on vérifie que c'est un ouvert, inclus dans A et le plus grand parmi ces derniers au sens de l'inclusion.*

Remarque On en déduit immédiatement : A est ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = A$. De même, A est fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.

Exemple 1 On se place dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de la norme $\|.\|$.

1. Notons F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Etablir alors que $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$.

Définition Soit A une partie non vide de E. On dit alors que A est **dense** dans E si l'une de ces assertions équivalentes est vérifiée :

1. $\overline{A} = E$
2. pour tout $x \in E$, $x \in \overline{A}$, c'est à dire que toute boule ouverte centrée en x rencontre nécessairement A.
3. pour tout $x \in E$, il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Encore une fois, on retiendra ce dernier point : il s'agit de la **caractérisation séquentielle de la densité** qui nous a déjà permis de mettre en avant quelques parties denses :

- dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$:

  par exemple, pour tout nombre réel x, il existe $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $q_n \longrightarrow x$.

- dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie, $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$:

  pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, il existe $(\phi_n) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\phi_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$. C'est le **théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier**.

- dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

  pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, il existe $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $P_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$. C'est le **théorème de Stone-Weiertrass** qui livre ce résultat d'approximation uniforme par des fonctions polynômes.

Mais il y en a d'autres qu'il faudra aussi connaître, car elles sont utiles pour les oraux.

Exemple 2 On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on munit de la norme $\|.\|_\infty$ définie par : $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la suite (A_p) définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par $A_p = A - \frac{1}{p}.I_n$.
   Justifier qu'il existe un rang p_0 à partir duquel $A_p \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

1. Encore une fois, si deux normes sont équivalentes, alors la densité ne dépendra du choix de la norme. Par exemple, les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, on pourra donc retenir qu'on a toujours :
$$\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
et cela, peu importe la norme utilisée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour finir, on peut aussi considérer une partie A de E et définir des ouverts et fermés relatifs à A : on parle de **topologie induite**, et naïvement les ouverts de A peuvent être vus comme des ouverts de E interceptés avec A, et les fermés de A peuvent être vus comme des fermés de E interceptés avec A.

1.2 Limite et continuité d'une application

Définition Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et notons A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

- On dit que f a une **limite en un point** a **adhérent à** A s'il existe $\ell \in F$, appelé limite de f en a suivant A si :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \epsilon$$
- On dit que f est **continue en un point** $a \in A$ si :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \epsilon$$

Remarques

1. On retrouve ici les définitions de limite et continuité telles qu'elles vous ont été présentées l'an dernier. D'ailleurs, on peut aussi interpréter la définition d'une limite en termes de voisinages :
$$\forall\, V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists\, U \in \mathcal{V}(a),\ f(U \cap A) \subset V$$

2. On peut encore montrer que cette limite est unique et elle est notée $\lim_{x \to a} f(x)$.

3. D'ailleurs, si f possède une limite finie en un point adhérent a, on dit encore que f est **prolongeable par continuité** et on pose $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Corollaire 9 (relation immédiate).

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et notons A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$. Alors, on a immédiatement :
$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$$

Corollaire 10 (caractérisation séquentielle de la limite ou de la continuité).

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et notons A une partie de E, $\ell \in F$ et $f : A \longrightarrow F$. Alors, on a les équivalences suivantes :

1. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
2. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a) \Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

▶ *Le deuxième point étant un cas particulier du premier, on se contente de démontrer la première équivalence par double implication : on raisonnera par l'absurde pour le sens réciproque.*

Remarques

1. En fait, ces deux caractérisations sont fondamentales.
   - La première est très utile pour justifier justement qu'une application n'a pas de limite en un point donné : il suffit d'exhiber deux suites qui tendent vers a, mais dont les suites images par f n'ont pas le même comportement asymptotique.
   - La seconde sera très utile pour étudier des fonctions à paramètre, notamment les intégrales à paramètre car en discrétisant ainsi le problème, on peut se ramener au théorème de convergence dominée.

2. On en déduit que pour toute fonction prolongeable par continuité, si a est un point adhérent à A, alors $f(a)$ est adhérent à $f(A)$.

3. Enfin, cette caractérisation séquentielle nous permet de retrouver toutes les opérations usuelles sur les limites qui avaient été étudiées pour les suites à valeurs dans un espace vectoriel normé :

Propriété 11 (opérations sur les limites)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et notons A une partie de E, $\ell_1, \ell_2 \in F$ et $f, g : A \longrightarrow F$. On a encore :

1. si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$, alors $\|f(x)\| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \|\ell_1\|$.
   Et en particulier, cela nous donne que pour toute fonction f continue sur A, $\|f\|_F$ est continue sur A.

2. si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\lambda.f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda.\ell_1 + \ell_2$.
   Et en particulier, cela nous donne que pour toutes fonctions f, g continues sur A, $\lambda.f + g$ est continue sur A.

3. si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$, et en supposant que fg ait un sens et que la norme $\|.\|_F$ est une norme d'algèbre, alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.
   Et en particulier, cela nous donne que pour toutes fonctions f, g continues sur A, fg est continue sur A.

Propriété 12 (cas particulier de la composition)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et notons A une partie de E, B une partie de F et $f : A \longrightarrow F$, $g : B \longrightarrow G$. On a encore :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \in B \\ g(X) \underset{X\to b}{\longrightarrow} \ell \in G \end{cases} \quad \Rightarrow g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

En particulier, cela nous donne que pour toutes fonctions f, g continues, et sous réserve d'existence, $g \circ f$ est continue sur A.

Propriété 13 (caractérisation ensembliste des applications continues)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.

2. l'image réciproque de tout fermé de F par f est un fermé de E.

3. l'image réciproque de tout ouvert de F par f est un ouvert de E.

▶ *On procède par cycle. Seule la dernière implication peut être difficile : on pourra revenir à la définition en ϵ.*

Remarques

1. Ce résultat est très pratique notamment pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes... puisqu'il sera très facile d'identifier une partie ouverte ou fermée. Par exemple,

$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow det(M) \neq 0 \Leftrightarrow det(M) \in \mathbb{K}^* \text{ et ainsi, } \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = det^{-1}(\mathbb{K}^*)$$

   Le déterminant étant une application continue (nous le verrons plus tard), on en déduit que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est nécessairement une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

2. Et quand celui-ci peut être appliqué à l'identité, il nous permet de relier les ouverts et les fermés d'un espace à l'autre. Ce sera là une astuce à avoir en tête quand on travaillera sur un espace vectoriel muni de normes distinctes.

Propriété 14 (cas d'égalité d'applications continues sur une partie dense)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et considérons f, g deux aplications continues sur E à valeurs dans F. Si de plus, f et g coïncident sur une partie A dense dans E, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

▶ *C'est immédiat : en considérant $x \in E$, celui-ci peut-être vu comme un point adhérent à A et on conclut à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité.*

Exemple 3 Soit $n \geq 2$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Justifier rapidement que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Fixons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer alors que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

2. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables sur $\mathbb{C}$, et on rappelle que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer alors que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A) = 0_n$.

Définition Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f : E \longrightarrow F$. On dit aussi que :

- f est **lipschitzienne** s'il existe $k \geq 0$ telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.
- f est **uniformément continue** si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, (x, y) \in E^2,\ \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon$$

Corollaire 15 (immédiat)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f : E \longrightarrow F$. Alors, on a :

$$f \text{ est lipschitzienne } \Rightarrow f \text{ est uniformément continue } \Rightarrow f \text{ est continue}$$

▶ *Cela va assez vite, il suffit à chaque fois de fixer le bon paramètre.*

1.3 Cas particulier des applications linéaires continues

Théorème 16 (caractérisation de la continuité pour les applications linéaires)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

1. f est lipschitzienne sur E.
2. f est continue sur E.
3. f est continue en 0_E.
4. f est bornée sur la boule unité fermée : $\exists\, k \geq 0,\ \forall x \in B_f(0_E, 1),\ \|f(x)\|_F \leq k$.
5. il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

▶ *On procède là encore par cycle, et on n'hésitera pas à normaliser les vecteurs pour rentrer dans la boule unité.*

Propriété 17 (norme subordonnée d'une application linéaire continue)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qu'on suppose continue sur E. Alors, les réels M_1, M_2 et M_3 définis par :

$$M_1 = \sup\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \neq 0_E\}\ \ ,\ M_2 = \sup\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E \leq 1\}\ \ ,\ M_3 = \sup\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E = 1\}$$

existent et on a $M_1 = M_2 = M_3$.

Ce réel sera aussi noté $|||f|||$ et il désigne la **norme de f subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$**.

▶ *L'existence est immédiat à l'aide des axiomes d'existence sur $\mathbb{R}$. Pour les égalités, on travaille simplement par antisymétrie.*

Remarque Pour une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ qu'on suppose continue sur E, on a donc toujours :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E$$

et la norme subordonnée peut aussi être vue comme le plus petit entier $k \geq 0$ réalisant l'inégalité $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ et ceci pour tout $x \in E$.

Exemple 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qu'on suppose continue sur E et notons λ une valeur propre de f. Montrer que nécessairement :
$$|\lambda| \leq |||f|||$$
2. On se place dans $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ et on définit $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
$$\phi(f) = \int_a^b f(t)\, dt$$
   (a) On munit E de la norme $\|.\|_1$ et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.
   Justifier que ϕ est continue sur E et établir que sa norme subordonnée est $|||\phi|||_1 = 1$.
   (b) On munit E de la norme $\|.\|_2$ et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.
   Justifier que ϕ est continue sur E et établir que sa norme subordonnée est $|||\phi|||_2 = \sqrt{b-a}$.
   (c) On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.
   Justifier que ϕ est continue sur E et établir que sa norme subordonnée est $|||\phi|||_\infty = b-a$.

Propriété 18 (la norme subordonnée est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$).

Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Alors, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $\mathcal{L}_c(E,F)$ et l'application $|||.||| : f \longmapsto |||f|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

► *Les propriétés sur les fonctions continues nous permettent d'affirmer que $\mathcal{L}_c(E,F)$est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Reste à montrer que l'application $|||.|||$ est une norme : on revient simplement à la définition.*

Propriété 19 (composition d'applications linéaires continues).

Soient $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ et $(G,\|.\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et considérons $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors, on a immédiatement :

1. $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||$.
2. Et en particulier, $\mathcal{L}_c(E)$, l'ensemble des endormophismes continus sur E, est une $\mathbb{K}$-algèbre pour laquelle $|||.|||$ désigne une norme d'algèbre.

► *La continuité est immédiate. On revient alors à la définition de la norme triple pour obtenir la majoration.*

Remarque On pourra retenir par exemple que $|||id_E||| = 1$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$, $|||f^k||| \leq |||f|||^k$.

Théorème 20 (cas particulier des applications linéaires en dimension finie).

Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si de plus, E est de dimension finie $n \geq 1$, alors toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est nécessairement continue.

► *On revient à la caractérisation pour les applications linéaires, puis on cherche à contrôler $\|f(x)\|_F$ à l'aide de la norme infinie avant de conclure par équivalence des normes en dimension finie.*

Remarques

1. On fera par exemple très attention à l'oral : si on vous donne un exercice mettant en jeu des suites de matrices, on peut toujours travailler par opérations sur les suites vectorielles dans une algèbre normée... mais on peut aussi prendre l'habitude de reconnnaître des applications linéaires en dimension finie.

   C'est d'ailleurs ce que nous avions évoqué pour le calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable :
$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!} = P \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_1^k}{k!} & (0) \\ (0) & \ddots \end{pmatrix}}_{=D_p} P^{-1} = \phi(D_p)\ \text{, avec } \phi : X \longmapsto PXP^{-1}$$
   ϕ étant linéaire en dimension finie, elle est continue et par passage à la limite, il vient : $\phi(D_p) \longrightarrow P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & (0) \\ (0) & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$.

2. Encore une fois, en dimension finie, on peut identifier une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme caniniquement associé $u_A : X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \longmapsto AX$. Dans ce cas, u_A est continue par linéarité et on pourra aussi noter :

$$|||A||| = |||u_A||| = \sup\{\frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \neq 0\}$$

Théorème 21 (caractérisation de la continuité pour les applications bilinéaires)**.**

Soient $(E_1, \|.\|_1), (E_2, \|.\|_2)$ et $(F, \|.\|_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et considérons l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2$ muni de la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(x_1, x_2) = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$$

Alors, pour toute application bilinéaire $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2})$.
3. f est bornée sur la boule unité fermée : $\exists\, k \geq 0,\ \forall x \in B_f(0_E, 1),\ \|f(x_1, x_2)\|_F \leq k$.
4. il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in E$, $\|f(x_1, x_2)\|_F \leq k\|x_1\|_1 \ldots \|x_2\|_2$.

► *On procède par cycle. Seul le dernier point sera délicat : on reviendra à la définition de la continuité en un point $a = (a_1, a_2)$ fixé dans E.*

Théorème 22 (caractérisation de la continuité pour les applications n-linéaires)**.**

Soient $(E_1, \|.\|_1), \ldots, (E_p, \|.\|_p)$ et $(F, \|.\|_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et considérons l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(x_1, \ldots, x_p) = \max(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_p\|_p)$$

Alors, on admet que pour toute application p-linéaire $f : E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow F$, on peut généraliser le résultat précédent et les assertions suivantes sont encore équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en $0_E = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.
3. f est bornée sur la boule unité fermée : $\exists\, k \geq 0,\ \forall x \in B_f(0_E, 1),\ \|f(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leq k$.
4. il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E$, $\|f(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leq k\|x_1\|_1 \ldots \|x_p\|_p$.

Théorème 23 (cas particulier des applications p-linéaires en dimension finie)**.**

Soient $(E_1, \|.\|_1), \ldots, (E_p, \|.\|_p)$ et $(F, \|.\|_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et considérons l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(x_1, \ldots, x_p) = \max(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_p\|_p)$$

Si de plus, les espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie $n_i \geq 1$, alors toute application p-linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est nécessairement continue.

► *On revient à la caractérisation pour les applications linéaires, puis on cherche à contrôler $\|f(x_1, \ldots, x_p)\|_F$ à l'aide de la norme infinie sur chacun des sous-espaces avant de conclure par équivalence des normes en dimension finie.*

Remarque On peut alors montrer par linéarité que de nombreuses applications sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: les applications produit $A \longmapsto \lambda A$, $A \longmapsto AM$ et $(A, M) \longmapsto AM$, sont continues et donc par opérations sur ces fonctions, que **toute expression polynomiale en une matrice donnée est continue**.
D'ailleurs, on justifiera de la même façon, que le déterminant, le produit scalaire ou la trace désignent des applications continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Quelques théorèmes fondamentaux

2.1 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et considérons K une partie non vide de E.
On dit que la partie K est **compacte** si toute suite (x_n) d'éléments de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K, c'est à dire que de toute suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Remarques

1. On fera attention car il s'agit de vérifier deux choses : d'une part, que de toute suite d'éléments K, on peut extraire une sous-suite convergente et que d'autre part, la limite reste bien dans K. On parle parfois de la "**propriété de Bolzano-Weiertrass**".

2. En particulier, la notion de convergence étant indépendante par des normes équivalentes, la compacité ne dépendra pas directement du choix de la norme équivalente retenue.

Propriété 24 (une partie compacte est fermée et bornée).

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et notons K une partie non vide de E. Si de plus, K est compacte, alors elle est fermée et bornée.

▶ *Le premier point est évident en se ramenant à la caractérisation séquentielle des fermés. Pour le scond point, on pourra raisonner par l'absurde.*

Corollaire 25 (fermé d'une partie compacte).

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et notons K une partie compacte de E. Si F est une partie fermée de K, alors F est aussi une partie compacte.

▶ *C'est immédiat puisque $F \subset K$, donc toute suite d'éléments de F vérifie la propriété de Bolzano-Weiertrass.*

Corollaire 26 (suite d'éléments d'une partie compacte).

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et notons K une partie compacte de E. Alors, toute suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

▶ *Le sens direct est immédiat si on connait la relation entre une suite convergente et ses suites extraites. Pour le sens réciproque, on est ramené au critère de convergence des suites bornées vu en début d'année : on peut à nouveau le prouver en raisonnant par l'absurde et en supposant que $u_n \not\longrightarrow \ell$.*

Théorème 27 (cas particulier des parties compactes en dimension finie).

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et considérons K une partie non vide de E. Si de plus, E est de dimenison finie $n \geq 1$, alors les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

▶ *Le sens direct a été prouvé plus tôt. Pour le sens réciproque, on n'hésitera pas à réinvestir le théorème de Bolzano-Weiertrass qui a été vu en début d'année.*

Remarques

1. On retrouve ici le cas de la droite réelle et par exemple, les segments de la forme $[a, b]$ sont des parties compactes de $\mathbb{R}$, mais ce ne sont pas les seules puisque la réunion finie de deux segments disjoints sera aussi compacte, en tant que partie fermée et bornée.

2. En dimension finie, toute les boules fermées de la forme $B_f(a, r)$ sont nécessairement compactes car elles sont fermées et aussi bornées :
$$\forall x \in B_f(a, r), \ \|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq r + \|a\|$$

Exemple 5 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On se place dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie :

$$\|P\|_\infty = \max |a_k|$$

   (a) Justifier rapidement que la boule unitée fermée est bien une partie fermée et bornée.

   (b) En utilisant la suite des monômes (X^n), montrer que $B_f(0_{\mathbb{R}[X]}, 1)$ n'est pas compacte.

2. On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose bornée, et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

   (a) Justifier que $\mathcal{A}$ est non vide.

   (b) Etablir que $\mathcal{A} = \cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n, n \geq p\}}$, puis en déduire qu'il s'agit d'une partie compacte de $\mathbb{K}$.

2.2 Applications continues sur un compact

Théorème 28 (image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et considérons $f : E \longrightarrow F$ une application continue.

1. Si K est une partie compacte de E, alors $f(K)$ est compacte dans F.
2. Et dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$, alors $f(K)$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}$. Il existe $(a, b) \in K^2$ tel que :

$$\begin{cases} \min f(K) = f(a) \\ \max f(K) = f(b) \end{cases} \quad \text{et ainsi, pour tout } x \in K,\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

▶ *Pour le premier point, on revient à la définition d'une partie compacte. Pour le soncd point, on pourra justifier l'existence des bornes, avant de montrer qu'elles sont réellement atteintes.*

Remarque Ce théorème est fondamental, car c'est lui qui nous permet à partir du théorème de Bolzano-Weiertrass dans $(E, \|.\|_\infty)$ de justifier que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

On aborde ici un exemple d'application du théorème des bornes atteintes... il est très classique et il faudra être capable de le refaire, d'autant que ce résultat amorce une des preuves du théorème de D'Alembert-Gauss !

Exemple 6 Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$ et on considère $f : E \longrightarrow F$ qu'on suppose continue sur E et telle que :

$$\|f(x)\|_F \underset{\|x\|_E \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Montrer que $\|f\|_F$ possède un minimum absolu sur E.

Théorème 29 (de Heine)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et considérons $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si K est une partie compacte de E, alors f est uniformément continue sur K de sorte que :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon$$

▶ *On raisonne par l'absurde et avec $\alpha = 1/n$, on construit des suites (u_n) et (v_n) de $K^{\mathbb{N}}$ qu'on utilisera pour obtenir une contradiction.*

2.3 Parties connexes d'un espace vectoriel normé

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et considérons C une partie non vide de E.
On dit que la partie C est **connexe par arcs** si pour tout couple $(x, y) \in C^2$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow C$ telle que :

$$\gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

On dit aussi que γ représente un arc reliant les vecteurs x et y.

Remarques

1. Autrement dit, une telle partie est toujours d'un seul tenant puisqu'on peut passer d'un point à un autre par un chemin continu à valeurs dans C.

2. De la même façon,
   - une partie C convexe est nécessairement connexe par arcs. En effet, si $(x,y) \in C^2$, alors en posant $\gamma(t) = tx + (1-t)y$, on construit un chemin continu à valeurs dans C tel que $\gamma(1) = x$ et $\gamma(0) = y$.
   - les intervalles de $\mathbb{R}$ représentent exactement les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$.
3. Par contre, on essaiera quand même de distinguer les notions de partie convexe et de partie connexe par arcs.

Propriété 30 (image continue d'une partie connexe par arcs)**.**

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et considérons $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si de plus C est une partie connexe par arcs de E, alors $f(C)$ est encore connexe par arcs.

▶ *C'est immédiat : si $(x,y) \in f(C)$, alors en notant (t,t') des antécédents par f, il existe un arc reliant t et t' de sorte que $f \circ \gamma$ relie x et y.*

Corollaire 31 (théorème général des valeurs intermédiaires)**.**

Soit $(E, \|.\|_E)$ et considérons $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si de plus C est une partie connexe par arcs de E, alors $f(C)$ est un intervalle.

▶ *C'est immédiat : d'après la propriété précédente, $f(C)$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle car par définition, ce sont les parties de $\mathbb{R}$ constituées d'un seul tenant.*

Remarques

1. Si $E = \mathbb{R}$, on retrouve évidemment le **théorème des valeurs intermédiaires** : si f est une fonction continue et non constante, alors l'image d'un intervalle par f est encore un intervalle.
2. La connexité est une notion très délicate. Par exemple, on pourra voir que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs en utilisant la surjectivité de l'exponentielle de matrices... Mais attention, le résultat n'est pas vraie sur $\mathbb{R}$.
3. Parfois, on préfère démontrer que la partie A est **étoilée**, c'est à dire qu'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$,
$$[a;x] := \{(1-t)a + tx,\ t \in [0,1]\} \subset A$$
En effet, en considérant $(x,y) \in A^2$, on peut alors construire un chemin continu inclus dans A joignant x et y de la forme :
$$\forall\, t \in [0,1], \gamma(t) = \begin{cases} a + (1-2t)(x-a), & \text{si } t \leq 1/2 \\ a + (2t-1)(y-a) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$
et ainsi, A est nécessairement connexe par arcs.

Exemple 7 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est connexe par arcs. *On pourra montrer que $\mathcal{D}$ est une partie étoilée.*
2. Justifier que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.