Chapitre 6

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir révisé les principaux résultats d'algèbre linéaire en début d'année, on présente ici la notion d'éléments propres en dimension quelconque. Cela nous permettra de mieux appréhender le principe de réduction des endomorphismes en dimension finie et des matrices carrées.

1 Eléments propres et polynôme caractéristique **2**
1.1 Polynômes d'endomorphisme et théorème des noyaux 2
1.2 Eléments propres d'un endomorphisme 3
1.3 Définition du polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton 5

2 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées **8**
2.1 Endomorphisme diagonalisable et matrice diagonalisable 8
2.2 Endomorphisme trigonalisable et matrice trigonalisable 10

3 Cas particulier de l'exponentielle de matrices **13**

Programmes 2022

Pour aller plus loin
Ce chapitre est essentiel, car avec celui sur les endormorphismes remarquables d'un espace euclidien, il recouvre presque tous les sujets de concours en algèbre, et on essaiera de comprendre les objectifs de la réduction : obtenir des tableaux numériques plus faciles à manipuler, cela facilite notamment la résolution des problèmes algébriques, des problèmes d'optimisation...

1 Eléments propres et polynôme caractéristique

1.1 Polynômes d'endomorphisme et théorème des noyaux

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle que dans l'algèbre des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$, on note :

$$f^0 = id_E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$$

- On appelle alors **polynôme d'endomorphisme en** f toute application $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ de la forme :

$$P(f) = a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 id_E$$

  où $a_0, \ldots, a_n$ désignent les coefficients du polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

- Et dans le cas particulier où $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on dit que P désigne un **polynôme annulateur** de f.

Remarques

1. En particulier, on en déduit que pour tout $x \in E$:

$$P(f)(x) = a_n f^n(x) + \ldots + a_1 f(x) + a_0 x$$

   mais on ne confondra surtout pas avec la notation $P(f(x))$ qui n'aurait pas de sens ici ! C'est même une erreur très courante à éviter...

2. Si de plus E est de dimension finie p et en notant M la matrice de f dans une base B, alors $P(f)$ a pour matrice :

$$P(M) = a_n M^n + \ldots + a_1 M + a_0 I_p$$

   et ainsi, on pourra aussi parler de **polynôme de matrice en** M, ou même de **polynôme annulateur de** M si $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Propriété 1 (composition de deux polynômes d'endomorphisme).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout polynôme $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on montre que :

1. $(\lambda.P + Q)(f) = \lambda.P(f) + Q(f)$
2. $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$

et ainsi, on pourra retenir que des polynômes en f commutent toujours.

► *Dans les deux cas, on revient à la définition d'un polynôme d'endomorphisme et on pourra invoquer la linéarité de f si besoin.*

Théorème 2 (idéal annulateur et existence du polynome minimal en dimension finie).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $Ann(f) = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Alors, on a :

1. $Ann(f)$ est un idéal non trivial de $\mathbb{K}[X]$.
2. On en déduit qu'il existe un unique polynôme unitaire μ_f de plus bas degré tel que :

$$Ann(f) = \mu_f \mathbb{K}[X]$$

On appelle alors **polynôme minimal** de f le polynôme μ_f qui engendre cet idéal annulateur.

► *Pour le premier point, on revient à la définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Pour le second point, on peut raisonner par existence et unicité : l'existence est triviale car tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux...*

Remarque Cette dernière égalité nous donne un résultat pratique : pour tout polynôme P annulateur de f, il vient $P \in \mu_f \mathbb{K}[X] \Rightarrow \mu_f | P$. Et ainsi, le polynôme minimal divise tous les polynômes annulateurs d'un endomorphisme donné. De plus, on retiendra que nécessairement : $deg(\mu_f) \geq 1$, car μ_f ne peut pas être égal à 1.

Exemple 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer le polynôme minimal d'une homothétie $h = \lambda.id_E$, d'un projecteur f et d'une symétrie s de E.
2. On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = 1$. Déterminer μ_A son polynôme minimal.

Corollaire 3 (une conséquence du polynôme minimal).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ et on note μ_f son polynôme minimal tel que $deg(\mu_f) = p \geq 1$. Alors,

1. la famille $(id_E, f, \dots, f^{p-1})$ est nécessairement libre dans $\mathcal{L}(E)$.
2. pour tout $k \geq p$, $f^k \in Vect(id_E, f, \dots, f^{p-1})$.

On dit aussi que $(id_E, f, \dots, f^{p-1})$ désigne une base de $\mathbb{K}[f]$, l'algèbre des polynômes d'endomorphisme en f et en particulier, on retiendra que :

$$dim(\mathbb{K}[f]) = deg(\mu_f)$$

► *Pour le premier point, on raisonne par l'absurde... on aura alors un polynôme annulateur en f de degré $< p$. Pour le second point, il suffit de faire la division euclidienne X^k par μ_f.*

Théorème 4 (de décomposition des noyaux).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère de plus $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on suppose premiers entre eux, alors on a la décomposition :

$$Ker(PQ(f)) = Ker(P(f)) \oplus Ker(Q(f))$$

► *On revient à la caractérisation d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces supplémentaires, mais on pensera d'abord à invoquer le théorème de Bézout pour obtenir une relation entre $P(f)$ et $Q(f)$.*

Théorème 5 (de décomposition des noyaux généralisé).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère de plus $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ qu'on suppose premiers entre eux deux à deux, alors on a la décomposition :

$$Ker(P_1 \dots P_n(f)) = \oplus_{i=1}^n Ker(P_i(f))$$

► *On procède simplement par récurrence sur $n \geq 2$. Pour l'hérédité, on pensera à montrer que le produit $P_1 \dots P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux avant d'utiliser le résultat précédent.*

Remarque Ce théorème des noyaux est **fondamental** pour ce chapitre. En effet, si on peut exhiber un polynôme annulateur P tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors on aura toujours une décompostion immédiate de l'espace de sorte que :

$$E = Ker(\underbrace{P(f)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}}) = \oplus_{i=1}^n Ker(P_i(f))$$

où P_i désignent des polynômes premiers entre eux deux à deux et qui constituent P. C'est même souvent dans cette décomposition qu'on ira puiser une base de réduction.

1.2 Eléments propres d'un endomorphisme

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On appelle **valeur propre** de f tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\exists\, x \in E - \{0_E\},\ f(x) = \lambda.x$$

- On appelle **vecteur propre** de f tout vecteur $x \in E - \{0_E\}$ tel que :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda.x$$

Dans ce cas et sous réserve d'existence, on appelle :

- **spectre de** f **sur** $\mathbb{K}$ noté $Sp_{\mathbb{K}}(f)$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de f appartenant à $\mathbb{K}$.
- **sous-espace propre associé à la valeur propre** λ le sous-espace $E_f(\lambda) = Ker(f - \lambda.id_E)$ constitué des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.

Corollaire 6 (première caractérisation d'une valeur propre)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a immédiatement :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in E - \{0_E\},\ f(x) = \lambda.x \;\Leftrightarrow\; E_f(\lambda) \neq \{0_E\} \;\Leftrightarrow\; f - \lambda.id_E \text{ n'est pas injective}$$

Remarques

1. Sans hypothèse supplémentaire, le spectre d'un endomorphisme sur $\mathbb{K}$ peut être vide ou infini... on pourra par exemple considérer les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $g \in \mathcal{L}(C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ définis par :

$$f : P \longmapsto XP \text{ et } g : u \longmapsto u'$$

2. Si on supppose de plus que E est de dimension finie, alors la dernière assertion est encore équivalente à $f - \lambda.id_E$ non bijective. Il faudra s'en souvenir car c'est très utile en exercice avec notamment ce cas particulier :

$$0 \notin Sp_{\mathbb{K}}(f) \Leftrightarrow f - 0.id_E = f \text{ est bijectif}$$

Propriété 7 (valeurs propres et polynômes d'endomorphismes en f)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$, x un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :
$$P(f)(x) = P(\lambda).x$$
et ainsi, x représente un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

2. Si de plus P est un polynôme annulateur de f, alors $P(\lambda) = 0$, et ainsi, on a toujours :
$$Sp_{\mathbb{K}}(f) \subset \text{Racines}_{\mathbb{K}}(P)$$

▶ *Pour le premier point, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(x) = \lambda^n.x$, puis on calcule $P(f)(x)$. Le second point est immédiat puisque $x \neq 0_E$, en tant que vecteur propre de f.*

Propriété 8 (liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de valeurs propres distinctes. Alors,

1. toute somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
2. toute famille de vecteurs propres associés à $(\lambda_i)_{i \in I}$ est libre.

▶ *Pour le premier point, on procède par récurrence sur le nombre de sous-espaces propres. Pour le second point, il suffit de montrer que toute sous-famille finie de vecteurs propres est libre.*

Remarque Encore une fois, si E est de dimension finie, alors le résultat précédent nous permet d'affirmer que le spectre, s'il n'est pas vide, est nécessairement fini de sorte que :

$$0 \leq Card(Sp_{\mathbb{K}}(f)) \leq dim(E)$$

Exemple 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$6A^TA = 5A - I_n$$

1. On introduit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à la matrice A. Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.
2. En déduire que f est nécessairement diagonalisable, et montrer alors que $A^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.3 Définition du polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton

Pour le reste du chapitre, on fait alors le choix de se placer en dimension finie. Ainsi, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et on notera B une base de E.

Définition Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** f le polynôme unitaire χ_f de degré n définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$\chi_f(\lambda) = det(\lambda.id_E - f) = det(\lambda.I_n - Mat_B(f))$$

Remarques

1. Si on note $M = Mat_B(f)$, alors par définition du déterminant, on rappelle que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} & \dots & -m_{1n} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -m_{n-1n} \\ -m_{n1} & \dots & -m_{nn-1} & \lambda - m_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\lambda - m_{ii}) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n, \sigma \neq id} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}}_{\text{de degré } \leq n-2}$$

$$= \lambda^n - (\sum_{i=1}^{n} m_{ii}) \lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + q_1\lambda + q_0$$

Avec $\lambda = 0$, on obtient $q_0 = \chi_f(0) = (-1)^n det(M)$, et ainsi on pourra donc retenir que χ_f est bien l'expresssion d'**un polynôme unitaire de degré** n en λ tel que :

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^n - tr(M)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n det(M)$$

2. Attention, dans certains ouvrages, on peut faire un abus de notation et définir χ_f par :

$$\chi_f(X) = det(X.id_E - f)$$

en laissant croire que X désigne une indéterminée classique et qui pourra être évaluée comme on l'entend : malheureusement, avec $X = g$, cela n'aurait pas de sens algébrique... car on travaille dans $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$.
On sera donc extrêmement rigoureux et on veillera à utiliser uniquement des scalaires dans la définition liée au déterminant. Bien entendu, une fois la forme polynomiale obtenue, on pourra alors travailler avec une indéterminée X.

Corollaire 9 (seconde caractérisation d'une valeur propre)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a immédiatement :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \ \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$$

► *On revient à la définition d'une valeur propre et on donne les équivalences usuelles... sans oublier qu'on travaille ici en dimension finie.*

Remarques

1. En dimension finie, les valeurs propres de f sont exactement les racines du polynôme caractéristique. Il faudra donc faire attention si on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et en fonction du corps des scalaires retenus, on a encore :

$$0 \leq Card(Sp_{\mathbb{K}}(f)) \leq deg(\chi_f) = dim(E)$$

2. On peut alors parler d'**ordre de multiplicité d'une valeur propre** λ_0, c'est simplement son ordre de multiplicité vis à vis du polynôme caractéristique.

Propriété 10 (le polynôme caractéristique est un invariant de similitude)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons encore B, B' deux bases de E. Alors, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_f(\lambda) = det(\lambda.I_n - Mat_B(f)) = det(\lambda.I_n - Mat_{B'}(f))$$

Autrement dit, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base retenue : c'est un **invariant de similtude**.

► *On revient à la définition du polynôme caractéristique et on voit* $I_n = PP^{-1}$*...*

Propriété 11 (polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons F un sous-espace stable par f, f_F l'endomorphisme induit sur F. Alors, on a : $\chi_{f_F} | \chi_f$.

► *On considère une base de F qu'on complète en une base de E. On obtient alors une matrice par blocs avec laquelle il est facile de calculer le polynôme caractéristique.*

Propriété 12 (majoration de la dimension des sous-espaces propres)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons λ_0 une valeur propre de f d'ordre de multiplicité m_{λ_0}. Alors, le sous-espace propre $E_f(\lambda_0)$ est un sous-espace stable et on a :

$$1 \leq dim(E_f(\lambda_0)) \leq m_{\lambda_0}$$

► *On vérifie d'abord que les endomorphismes f et $f - \lambda_0.id_E$ commutent, puis on invoque la propriété précédente.*

Remarque Pour finir, on rappelle qu'à toute matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut construire un unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $M = Mat_B(f)$, où B désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, on pourra adapter toutes les définitions des éléments propres de f à la matrice M :

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **valeur propre** de M tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\exists\, X \in \mathcal{M}_{n1} - \{0\},\ MX = \lambda.X$$

- On appelle **vecteur propre** de M tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n1} - \{0\}$ tel que :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ MX = \lambda.X$$

Dans ce cas et sous réserve d'existence, on appelle :

- **spectre de** M **sur** $\mathbb{K}$ noté $Sp_{\mathbb{K}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de M appartenant à $\mathbb{K}$.
- **sous-espace propre associé à la valeur propre** λ le sous-espace $E_M(\lambda) = Ker(M - \lambda.I_n)$ constitué des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.

De plus, on appelle **polynôme caractéristique de** M le polynôme unitaire χ_M de degré n définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$\chi_M(\lambda) = det(\lambda.I_n - M)$$

Exemple 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et on définit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$.

   En fait, pour tout polynôme unitaire P, on peut construire une telle matrice A telle que $\chi_A = P$: on dit aussi qu'il s'agit de la **matrice compagnon** associée au polynôme P.

2. On considère A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que $\chi_A(\lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}$.

Remarques

1. On retrouve alors les mêmes propriétés sur le polynôme caractéristique : c'est un invariant de similitude et on a toujours l'équivalence fondamentale :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \ \Leftrightarrow\ \exists\, X \in \mathcal{M}_{n1} - \{0\},\ MX = \lambda.X \ \Leftrightarrow \Leftrightarrow\ M - \lambda.I_n \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow\ \chi_M(\lambda) = 0$$

   En particulier, des matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

2. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pourra vite être limité dans l'étude d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ surtout quand le spectre sur $\mathbb{R}$ est vide... Par contre, si on travaille matriciellement, alors on a évidemment :

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

   et dans ce cas, le théorème de D'Alembert-Gauss nous fournira au moins une valeur propre avec laquelle travailler et le polynôme caractéristique sera toujours scindé de la forme :

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_{\lambda_r}},\ \text{avec } m_{\lambda_1} + \dots + m_{\lambda_r} = n$$

   On prendra donc souvent l'habitude de se plonger dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$!

3. Il y a enfin des matrices pour lesquelles il est très facile de lire le spectre, ce sont les matrices triangulaires ou diagonales.

Corollaire 13 (cas particulier des matrices semblables à une matrice triangulaire ou diagonale)**.**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose semblable à une matrice triangulaire ou diagonale. Alors, le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres sont données par les coefficients diagonaux $(t_{ii})_{1\leq i\leq n}$ ou $(d_{ii})_{1\leq i\leq n}$.

► *C'est immédiat : le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, il suffit alors de calculer le déterminant d'une matrice triangulaire.*

Théorème 14 (de Cayley-Hamilton)**.**

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et notons χ_f son polynôme caractéristique. Alors, $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et ainsi,

$$\chi_f \in Ann(f)$$

2. En adaptant les définitions, on montre aussi que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et ainsi,

$$\chi_M \in Ann(M)$$

► *Soit x un vecteur non nul, on introduit le sous-espace $F_x = Vect(f^k(x), k \in \mathbb{N})$: on montre alors qu'il s'agit d'un sous-espace stable de dimension $p \leq n$, et on calcule le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit f_{F_x} avant de justifier que $\chi_f(f)(x) = 0_E$. Le résultat étant encore vrai pour $x = 0_E$, on en déduit le théorème de Cayley-Hamilton.*

Remarques

1. Bien entendu, cela nous donne une relation immédiate entre le polynôme minimal et le polynôme caratéristique d'un endomorphisme f : on retiendra que $\mu_f | \chi_f$ et ainsi, on a immédiatement :

$$Sp_{\mathbb{K}}(f) \subset \text{Racines}_{\mathbb{K}}(\mu_f) \subset Sp_{\mathbb{K}}(f) \Rightarrow \text{Racines}_{\mathbb{K}}(\mu_f) = Sp_{\mathbb{K}}(f)$$

2. Le polynôme caractéristique nous donne ici un polynôme annulateur particulier, mais on rappelle que $deg(\chi_M) = n$, et donc, il ne sera pas toujours exploitable... on préfèrera la plupart du temps calculer les premières puissances de M pour en déterminer un polynôme annulateur de degré moins élevé.

2 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

2.1 Endomorphisme diagonalisable et matrice diagonalisable

Définition

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. On dit que M est **diagonalisable** si f est diagonalisable, c'est à dire si M est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ M = PDP^{-1}$$

avec D une matrice diagonale.

Remarques

1. Si f est diagonalisable, alors la base B dans laquelle f est diagonale n'est rien d'autre qu'une base de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$ puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

2. Ces définitions sont très proches. On travaillera donc sur les endomorphismes diagonalisables et on pourra encore une fois adapter tous les résultats obtenus aux matrices carrées : il suffira d'introduire en cas de besoin l'endomorphisme canoniquement associé.

Propriété 15 (interprétation de la diagonalisabilité d'un endomorphisme).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note de plus $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est diagonalisable
2. $E = \oplus_{i=1}^{p} E_f(\lambda_i)$, et ainsi E se décompose en somme directe de sous-espaces propres stables par f
3. $\sum_{i=1}^{p} dim(E_f(\lambda_i)) = n$

Et dans ce cas, on peut toujours construire B une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \ddots \end{matrix}} & & (0) \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & (0) \\ (0) & \ddots \end{matrix}} & \\ (0) & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & (0) \\ (0) & \ddots \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

▶ *On procède par cycle, et on n'hésitera pas à revenir aux résultats précédents : que ce soit la caractérisation d'une décomposition en dimension finie, ou la liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.*

Remarque Si $E = \oplus_{i=1}^{p} E_f(\lambda_i)$, alors on peut remarquer que E se décompose en somme directe de sous-espaces propres stables par f et pour chacun de ces sous-espaces l'endomorphisme induit vérifie :

$$f_{E_f(\lambda_i)} = \lambda_i.id_E,\ \text{c'est une homothétie !}$$

Propriété 16 (une condition suffisante de diagonalisation).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si de plus f possède n valeurs propres distinctes, alors f est nécessairement diagonalisable.

▶ *Dans ce cas particulier, on peut obtenir n vecteurs propres associés, et donc libres, qui définiront une base de diagonalisation.*

Remarques

1. On fera attention, il ne s'agit là que d'une condition suffisante car a priori, on n'a pas toujours n valeurs propres distinctes. C'est par exemple le cas des projecteurs et des symétries : ce sont des endomorphismes diagonalisables pour lesquels le spectre ne contient qu'une ou deux valeurs propres.

2. En fait, pour vérifier si un endomorphisme est diagonalisable, **on prèfèrera souvent passer par l'une des deux caractérisations** à venir :
   - à l'aide du polynôme caractéristique,
   - en utilisant un polynôme annulateur bien choisi.

Théorème 17 (condition nécessaire et suffisante de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est diagonalisable si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{son polynôme caractéristique } \chi_f \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \\ \text{pour toute valeur propre } \lambda_i \in Sp_{\mathbb{K}}(f),\ dim(E_f(\lambda_i)) = m_{\lambda_i} \end{cases}$$

où m_{λ_i} désigne l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique.

▶ *On procède par double implication. Pour le sens direct, on traduit la diagonalisabilité et on calcule χ_f dans la base de vecteurs propres, il restera à justifier l'égalité des dimensions. Pour le sens réciproque, on écrit l'égalité au niveau des degrés, ce qui permet en fait d'obtenir une base de n vecteurs propres indépendants.*

Remarque La trace et le déterminant étant des invariants de similitude, on en déduit que pour tout endormorphisme f diagonalisable :

$$\begin{cases} tr(f) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}.\lambda_i, \text{ c'est à dire la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité} \\ det(f) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}, \text{ c'est à dire le produit des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité} \end{cases}$$

Exemple 4 On note pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels $M(a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Propriété 18 (polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ qu'on suppose diagonalisable. Alors, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes, on a :

$$\mu_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \ldots (X - \lambda_p)$$

▶ *On procède en deux temps : à l'aide du théorème des noyaux, on montre d'abord que le produit des $(X - \lambda_i)$ désigne un polynôme annulateur. Puis, on justifie que μ_f est aussi multiple de ce produit... les polynômes étant associés et unitaires, ils seront égaux.*

Théorème 19 (condition nécessaire et suffisante de diagonalisation à l'aide des polynômes annulateurs)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

1. f est diagonalisable si et seulement si f annule un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{K}[X]$.
2. f est diagonalisable si et seulement si μ_f est scindé à racines simples.

▶ *On procède par double implication. Le sens direct est immédiat puisque le polynôme minimal convient. Pour le sens réciproque, on invoque encore le théorème des noyaux pour exhiber une décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres. Le second point est immédiat : c'est un cas particulier très pratique.*

Exemple 5 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et notons $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f^4 = f^2 \text{ et } \pm 1 \in Sp(f)$$

Etablir que f est nécessairement diagonalisable.

Corollaire 20 (diagonalisation d'un endomorphisme induit).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ qu'on suppose diagonalisable. Alors, pour tout sous-espace F stable par f, l'endomorphisme induit f_F est aussi diagonalisable.

▶ *C'est immédiat : f annule un polynôme scindé à racines simples P, il en est donc de même pour f_F.*

On finit ici avec une application directe du corollaire précédent : c'est la **réduction simultanée** qui est très utile dans de nombreux exercices, et qu'il ne faudra pas hésiter à rappeler dans vos oraux.

Exemple 6 Considérons ici E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et considérons $f, g \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels on suppose que :

$$\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont diagonalisables} \\ f \circ g = g \circ f \end{cases}$$

En particulier, f étant diagonalisable, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_f(\lambda_i)$ les sous-espaces propres associés tels que : $E = \oplus_{i=1}^{p} E_f(\lambda_i)$.

1. Justifier que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $E_f(\lambda_i)$ est stable par g.

2. Montrer alors qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices associées à f et g sont **simultanément diagonales**.

Remarques

1. On peut réécrire le résultat de l'exemple précédent et ainsi, dans les conditions de l'exemple et en notant A, B des matrices canoniquement associées aux endomorphismes f et g, il existe une matrice de passage commune $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\begin{cases} A = PD_1P^{-1} \\ B = PD_2P^{-1} \end{cases} \quad \text{avec } D_1, D_2 \text{ des matrices diagonales}$$

2. D'ailleurs, on retiendra (et c'est un exercice difficile) que par récurrence sur le nombre d'endomorphismes, on peut généraliser ce résultat, et si $u_1, \dots, u_p$ $(p \geq 2)$ désignent des endomorphismes de E de dimension finie, tels que :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,p]\!],\ u_i \text{ est diagonalisable} \\ \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i \end{cases}$$
alors il existe une base de diagonalisation commune dans laquelle les matrices associées sont toutes diagonales.

2.2 Endomorphisme trigonalisable et matrice trigonalisable

Définition

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **trigonalisable** s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. On dit que M est **trigonalisable** si f est trigonalisable, c'est à dire si M est semblable à une matrice triangulaire :
$$\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ M = PTP^{-1}$$
avec T une matrice triangulaire.

Remarques

1. La plupart du temps, on se ramènera à une matrice triangulaire supérieure, mais cela n'a pas beaucoup d'importance. En effet, s'il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure, on peut toujours réarranger les vecteurs et obtenir dans la base $B' = (e_n, \dots, e_1)$ une matrice qui sera triangulaire inférieure.

2. Ces définitions sont très proches. On travaillera donc sur les endomorphismes trigonalisables et on pourra encore une fois adapter tous les résultats obtenus aux matrices carrées : il suffira d'introduire en cas de besoin l'endomorphisme canoniquement associé.

Propriété 21 (cas particulier des endomorphismes nilpotents).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose de plus que g est nilpotent d'indice $p \geq 1$, c'est à dire que p désigne le plus petit entier tel que :

$$g^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } g^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Alors, on a :

1. $p \leq dim(E)$
2. $\{0_E\} \subsetneq Ker(g) \subsetneq Ker(g^2) \ldots \subsetneq Ker(g^{p-1}) \subsetneq Ker(g^p) = E$
3. il existe une base B dans laquelle la matrice de g est triangulaire strictement supérieure et peut s'écrire par blocs :

$$Mat_B(g) = \begin{pmatrix} O_1 & \bigstar & \ldots & \bigstar \\ \vdots & O_2 & \ddots & \vdots \\ & & & \bigstar \\ (0) & \ldots & & O_p \end{pmatrix}$$

► *Les deux premiers points ont déjà été traités en exercice. Il suffit alors de prendre une base de B_1 de $Ker(g)$ qu'on complète en une base $B_1 \cup B_2$ de $Ker(g^2)$... jusqu'à compléter en une base de $B_1 \cup \ldots \cup B_p$ de $Ker(g^p) = E$.*

Remarques

1. Globalement, on pourra donc retenir qu'un endomorphisme nilpotent est toujours trigonalisable et de spectre nul puisque dans cette base, tous les coefficients diagonaux sont nuls. En particulier, on obtient dans cette base : $\chi_g(\lambda) = \lambda^n$.
2. Ce dernier point nous permet même de caractériser les matrices nilpotentes à l'aide du polynôme caractéristique :

   $$M \text{ nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique vérifie } \chi_M(\lambda) = \lambda^n$$

   D'ailleurs, le sens réciproque est immédiat puisqu'il découle du théorème de Cayley-Hamilton.

Propriété 22 (des sous-espaces caractéristiques).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère λ_i une valeur propre de f et le sous-espace $E_{c,f}(\lambda_i) = Ker((f - \lambda_i.id_E)^{m_{\lambda_i}})$ est appelé **sous-espace caractéristique associé à la valeur propre** λ_i. Alors, on a :

1. les sous-espaces caractéristiques associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
2. $dim(E_{c,f}(\lambda_i)) = m_{\lambda_i}$
3. $E_f(\lambda_i) \subset E_{c,f}(\lambda_i)$ et on a égalité si f est diagonalisable.

► *Le premier point est immédiat et il découle du théorème de décomposition des noyaux. Pour le second point, on pourra travailler de deux façons (χ_f scindé ou non)... mais dans les deux cas, on montre d'abord que la dimension est inférieure à la multiplicité avant d'aller chercher l'égalité. Enfin, le dernier point a déjà été établi.*

Théorème 23 (condition nécessaire et suffisante de trigonalisation à l'aide du polynôme caractéristique).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

► *On procède par double implication. Pour le sens direct, on traduit encore la trigonalisabilité et on calcule χ_f dans la base obtenue. Pour le sens réciproque, on invoque le théorème de Cayley-Hamilton : le théorème des noyaux nous permet alors de décomposer E en somme directe de sous-espaces caractéristiques sur lesquels on a un opérateur nilpotent.*

Remarques

1. Cette preuve est constructive puisqu'elle nous donne **un moyen pratique pour construire une base de trigonalisation** à partir de la **décomposition spectrale** :

   $$E = Ker(\chi_f(f)) = \oplus_{i=1}^{p} Ker((f - \lambda_i.id_E)^{m_{\lambda_i}})$$

Ainsi, pour chaque sous-espace caractéristique, on cherche une base de m_{λ_i} vecteurs adaptée à la suite d'inclusions strictes :

$$\{0_E\} \subsetneq Ker(f-\lambda_i.id_E) \subsetneq Ker((f-\lambda_i.id_E)^2)\ldots \subsetneq Ker((f-\lambda_i.id_E)^{p_i}) = \ldots = E_{c,f}(\lambda_i)$$

où p_i désigne l'indice de nilpotence de $g_i = f-\lambda_i.id_E$, puis en concaténant les bases obtenues, on aura :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ (0) & & \lambda_1 \end{matrix}} & & (0) \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & * & * \\ & \ddots & * \\ (0) & & \lambda_2 \end{matrix}} & \\ (0) & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & * & * \\ & \ddots & * \\ (0) & & \lambda_p \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

On peut alors remarquer que E se décompose en somme directe de sous-espaces caractéristiques stables par f et pour chacun de ces sous-espaces l'endomorphisme induit vérifie :

$$f_{E_{c,f}(\lambda_i)} = \lambda_i.id_E + g_i, \text{ où } g_i = f-\lambda_i.id_E \text{ est nilpotent}$$

2. La trace et le déterminant étant des invariants de similitude, on en déduit que pour tout endormorphisme f trigonalisable, on a encore :

$$\begin{cases} tr(f) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}.\lambda_i, \text{ c'est à dire la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité} \\ det(f) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}, \text{ c'est à dire le produit des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité} \end{cases}$$

3. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est nécessairement scindé et ainsi, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_M est scindé. On en déduit qu'elle est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\ M = PTP^{-1}$$

Ainsi, même avec des matrices à coefficients réels, on n'hésitera pas à se plonger dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemple 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^5 = M^2 \text{ et } tr(M) = n$$

Corollaire 24 (condition nécessaire et suffisante de trigonalisation à l'aide d'un polynôme annulateur)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, en adaptant la preuve précédente, on obtient un dernier critère de trigonalisation tout aussi pratique :

f est trigonalisable si et seulement si f annule un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Comme pour les endomorphismes diagonalisables, on peut encore obtenir sous certaines conditions une **réduction simultanée** de deux endomorphismes trigonalisables.

Exemple 8 Considérons ici E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et considérons $f, g \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels on suppose que :

$$\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont trigonalisables} \\ f \circ g = g \circ f \end{cases}$$

1. Etablir que f et g possèdent au moins un vecteur propre commun.
2. Montrer alors que f et g sont **simultanément trigonalisables**, c'est à dire qu'en notant A, B des matrices canoniquement associées aux endomorphismes f et g, montrer qu'il existe une matrice de passage commune $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{cases} A = PT_1P^{-1} \\ B = PT_2P^{-1} \end{cases} \quad \text{avec } T_1, T_2 \text{ des matrices triangulaires}$$

Remarque D'ailleurs, on retiendra (et ce sont les mêmes idées que pour la diagonalisation simultanée) que par récurrence sur le nombre d'endomorphismes, si $u_1, \ldots, u_p$ $(p \geq 2)$ désignent des endomorphismes de E de dimension finie, tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, p]\!],\ u_i \text{ est trigonalisable} \\ \forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i \end{cases}$$

alors il existe une base de trigonalisation commune dans laquelle les matrices associées sont toutes triangulaires.

3 Cas particulier de l'exponentielle de matrices

Définition On rappelle que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il est toujours possible de considérer la norme $\|.\|$ définie par :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Cette norme désigne une norme d'algèbre et ainsi, on montre que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, et donc en dimension finie, elle est convergente.
On appelle alors **exponentielle de** A la somme de cette série de sorte que :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Propriété 25 (propriété algébrique pour deux matrices qui commutent)**.**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, on a :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

▶ *Les séries $\sum A^k/k!$ et $\sum B^k/k!$ étant absolument convergentes, on peut invoquer le théorème relatif au produit de Cauchy.*

Corollaire 26 (inversibilité et inverse)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a :

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

▶ *C'est immédiat : comme A et $-A$ commutent, il suffit d'appliquer le résultat précédent.*

Propriété 27 (cas particulier d'une matrice nilpotente)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose nilpotente d'indice $p \geq 1$. Alors, on a immédiatement :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!}$$

▶ *La matrice étant nilpotente, la somme est finie.*

Propriété 28 (cas particulier d'une matrice diagonalisable)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose diagonalisable. Alors, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale de coeffients $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. Alors, on a immédiatement par opérations sur les matrices diagonales :

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi, $\exp(A)$ est aussi diagonalisable et $Sp_{\mathbb{K}}(\exp(A)) = \{e^{\lambda_i},\ \lambda_i \in Sp_{\mathbb{K}}(A)\}$, avec le même ordre de multiplicité pour les valeurs propres distinctes.

► *On se ramène à cran fini afin d'opérer sur les coefficients et on reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle.*

Propriété 29 (cas particulier d'une matrice trigonalisable)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose trigonalisable. Alors, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec T une matrice triangulaire de coeffients $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors, on a immédiatement par opérations sur les matrices triangulaires :

$$\exp(A) = P\exp(T)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi, $\exp(A)$ est aussi trigonalisable et $Sp_{\mathbb{K}}(\exp(A)) = \{e^{\lambda_i},\ \lambda_i \in Sp_{\mathbb{K}}(A)\}$, avec le même ordre de multiplicité pour les valeurs propres distinctes.

► *On se ramène à cran fini afin d'opérer sur les coefficients et on reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle.*

Remarques

1. Dans les deux cas, on peut facilement calculer le déterminant de $\exp(A)$ et il vient :

$$det(\exp(A)) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{tr(A)}$$

   D'ailleurs, la trace et le déterminant étant des invariants de similitude, ce dernier résultat sur le déterminant sera vrai pour toute matrice A donnée.

2. En fait, si on se plonge encore dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la **décomposition de Dunford** vue en TD spécifique nous permet alors d'obtenir :

$$\exp(M) = \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$$

   et en utilisant les propriétés précédentes, on peut alors calculer rapidement l'exponentielle de M.