Chapitre 5

Fonctions polynômes et polynômes à une indéterminée

On revient ici sur les formules de Taylor, très utiles dans l'étude des fonctions que ce soit pour des informations locales ou des identités globales. On verra notamment le cas particulier des fonctions usuelles qui nous donneront nos premiers développements en série entière de référence.
Mais ce chapitre est aussi l'occasion de revenir sur la notion plus générale de polynômes à une indéterminée : les propriétés arithmétiques sont nombreuses et le principe de factorisation sera indispensable à la réduction des endomorphismes en dimension finie.

Programmes 2022

Pour aller plus loin
L'étude des polynômes est riche en mathématiques car elle offre de beaux problèmes, que ce soit en les traitant de façon analytique ou de façon algébrique. Il faudra donc en mesurer les différentes propriétés et retenir que leur étude en spé cache un réel objectif : la réduction des endomorphismes en dimension finie.

1 Fonctions polynômes et applications

1.1 Rappels sur les fonctions polynômes

Définition On rappelle qu'on appelle :

- **fonction polynôme à coefficients réels** toute fonction $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

  $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ avec $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels, appelés **coefficients de la fonction polynôme**.

- **fonction polynôme à coefficients complexes** toute fonction $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme :

  $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ avec $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes, appelés **coefficients de la fonction polynôme**.

Remarques

1. En particulier, une telle fonction polynôme est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
2. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on prendra souvent l'habitude de prolonger une telle fonction polynôme à coefficients réels sur $\mathbb{C}$. Cela nous permettra notamment d'aller chercher les racines d'un polynôme.

Définition Soit p une fonction polynôme à coefficients complexes qu'on suppose non nulle, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

On dit alors que p est de **degré** n et a_n est appelé **coefficient dominant**.
Si au contraire, p désigne la fonction polynôme nulle, on pose alors :

$$deg(p) = -\infty$$

Propriété 1 (opérations sur les fonctions polynômes)**.**

Soient p, q deux fonctions polynômes à coefficients complexes telles que $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ et $q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$.
Alors, les règles usuelles de calculs nous donnent :

1. $p + q$ désigne encore une fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(p+q)(z) = p(z) + q(z) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) z^k \text{ avec } a_k = 0 \text{ si } k > n \text{ et } b_k = 0 \text{ si } k > m$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda.p$ désigne encore une fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par : $\lambda.p(z) = \lambda \times p(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k z^k$.
3. $p \times q$ désigne encore une fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(p \times q)(z) = p(z) \times q(z) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$$

où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ avec $a_i = 0$ si $i > n$ et $b_{k-i} = 0$ si $k - i > m$.

Et en particulier, on retiendra :

$$\begin{cases} deg(p+q) \leq \max(deg(p), deg(q)) \\ deg(p) \neq deg(q) \Rightarrow deg(p+q) = \max(deg(p), deg(q)) \\ deg(p \times q) = deg(p) + deg(q) \end{cases}$$

Propriété 2 (règle de dérivation)**.**

Soit p une fonction polynôme à coefficients complexes telle que $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Alors, p est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$ et les règles usuelles de dérivation nous donnent :

- pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $p^{(i)}(z) = \sum_{k=i}^{n} a_k k(k-1)\ldots(k-i+1) z^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-i)!} z^{k-i}$,
- pour tout $i > n$, $p^{(i)}(z) = 0$.

Remarque Par convention, on a encore $p^{(0)} = p$ et avec les notations de la définition, on pourra retenir que la i-ième dérivée $p^{(i)}$ est encore une fonction polynôme de degré $n - i$ de sorte que :

$$p^{(n)}(z) = a_n n! \text{ et } p^{(n+1)}(z) = 0$$

1.2 Formules de Taylor et approximation locale

Dans cette partie, les fonctions considérées seront définies sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 3 (formule de Taylor avec reste intégral)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. Alors, on a :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

La fonction polynôme $T_{n,a} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$ représente le **polynôme de Taylor de degré** n associé à la fonction f au point a.

► *On procède simplement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ dans laquelle on mettra en place une intégration par parties bien choisie.*

En effet, il vient :

- *pour $n = 0$, on a pour tout $x \in I$, $\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\ dt = f(x) - f(a)$ et ainsi, l'égalité est vraie.*
- *soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel on suppose que l'égalité est vraie pour toute fonction de classe C^{n+1}. Alors, si $f \in C^{n+2}(I, \mathbb{K})$, f est aussi de classe C^{n+1} sur I de sorte que :*

  $$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

  En procédant par intégration par parties, on en déduit :

  $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + [-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \end{aligned}$$

  Et ainsi, l'égalité est encore vraie. Ce qui prouve par récurrence la formule de Taylor avec reste intégral.

Corollaire 4 (inégalité de Taylor-Lagrange)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. On suppose de plus qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, alors pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

► *C'est immédiat : il suffit de majorer le reste intégral et d'exploiter l'inégalité triangulaire pour les intégrales.*

Remarques

1. On retiendra que la formule de Taylor avec reste intégral est très pratique, car elle nous livre ici une égalité globale sur tout l'intervalle I.
2. L'inégalité de Taylor-Lagrange qui en résulte nous permet de mesurer l'erreur d'approximation entre la fonction f et $T_{n,a}$, le polynôme de Taylor associé. En particulier, si on travaille sur $I = [a - \alpha, a + \alpha]$, un voisinage de a :

   $$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

   Et ainsi, quand $x \to a$,

   $$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}| \longrightarrow 0$$

   On pourra donc retenir que les polynômes de Taylor nous donnent une **approximation locale de la fonction** f, ce qui nous permettra de mieux cerner le comportement de la fonction donnée. C'est d'ailleurs tout l'intérêt de la **formule de Taylor-Young**.

Corollaire 5 (formule de Taylor-Young).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

▶ *C'est immédiat puisque l'inégalité de Taylor-Lagrange nous permet d'affirmer que le reste intégral est un bien un* $o((x-a)^n)$.

Corollaire 6 (développements limités usuels).

Les fonctions usuelles étant souvent de classe C^∞ sur leur domaine de définition, on en déduit à l'aide de la formule de Taylor-Young les dévelopements limités suivants au voisinage de 0.
Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \alpha(\alpha-1)\, \frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\, \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1) \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

En particulier, il vient pour $\alpha = -1$:

- $\displaystyle \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
- $\displaystyle \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$

Par opérations sur les développements limités, on a enfin :

- $\displaystyle \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
- $\displaystyle \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
- $\displaystyle \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})$

Exemple 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer rapidement un développement limité de tan en 0 à l'ordre 7.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$$

1.3 Cas particulier des fonctions développables en série entière

Définition On dit qu'une fonction f est **développable en série entière** au voisinage de 0 s'il existe un réel strictement positif r et une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Propriété 7 (condition suffisante pour une fonction de classe C^∞ sur un intervalle réel)**.**

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I, contenant un voisinage de 0, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose de plus qu'il existe $r > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in]-r, r[, \ |f^{(n)}(x)| \leq M$$

Alors, f est développable en série entière sur $]-r, r[$ et :

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

► *Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, et on montre que le reste intégral définit une suite de fonctions qui converge simplement vers 0.*

Remarques

1. Sous la condition donnée, on récupère donc la forme du développement en série entière et on verra plus tard qu'un développement en série entière a toujours la même forme.

2. On fera très attention à ne pas confondre les **développements limités** qui permettent d'obtenir une approximation locale de f au voisinage d'un point, et les **développements en série entière** qui fournissent une égalité sur un intervalle... la confusion vient de l'expression des coefficients de ces développements, ce sont les mêmes que pour les polynômes de Taylor, mais ces sommes infinies ne peuvent pas être considérées comme des fonctions polynômes !

3. Le cours sur les séries nous a déjà donné des développements de référence et on rappelle que :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C}, \ e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \\ \forall z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1, \ \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \end{cases}$$

   En restreignant à $\mathbb{R}$, on retrouve alors des développements en série entière très pratiques.

Corollaire 8 (développements en série entière usuels)**.**

La condition suffisante ou la remarque précédente nous permettront, plus tard, de retrouver tous ces développements en série entière usuels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, il vient pour $\alpha = -1$:

- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

Par opérations sur les séries entières, on a enfin :

- $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$
- $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Remarque Ces développements sont très commodes, mais ils ne concernent pas toutes les fonctions et ne sont valables que sur certains **domaines de convergence**. Par exemple, la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est développable en série entière que sur $]-1,1[$.
De plus, la condition suffisante est très contraignante et il existe de nombreuses fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0 : on essaiera donc de retenir l'exemple suivant.

Exemple 2 On considère la fonction $f : x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Justifier que f peut-être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n de degré $< 3n$ tel que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$
3. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Ainsi, si on suppose que f possède un développement en série entière sur un intervalle non trivial, il viendrait :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \Rightarrow f = 0 \text{ sur }]-r,r[, \text{ ce qui est contradictoire.}$$

2 Polynômes à une indéterminée

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne encore un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ lui-même.

2.1 L'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[X]$

Définition On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute suite de coefficients $P = (a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ presque nulle, c'est à dire pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall k > n,\ a_k = 0$$
En notant alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots)$, un tel polynôme peut aussi être défini comme la somme formelle :
$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
Généralement, on dit que P désigne un **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ **et d'indéterminée** X, et on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X.

Remarques

1. Bien entendu, l'application $\phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow F(\mathbb{K},\mathbb{K})$ définie par :
$$\phi : P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \longmapsto [p : z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^n]$$
est une application bijective, et ainsi on aura l'habitude d'**identifier** un polynôme et sa fonction polynôme associée.
On pourra donc noter indifféremment P ou $P(X)$ ces polynômes d'indéterminée X.

2. En particulier, on retrouve qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, et on pourra adapter toutes les définitions et opérations algébriques introduites sur les fonctions polynômes : notion de degré, somme, produit, produit externe, polynômes dérivés...

Définition Considérons $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. En particulier,

- si tous les coefficients sont nuls, on dit encore que P désigne le **polynôme nul** noté $0_{\mathbb{K}[X]}$;
- sinon, en notant a_n le coefficient non nul d'indice le plus élevé, on dit encore que le polynôme P est de **degré** n et a pour **coefficient dominant** a_n.

Remarque Dans le cas particulier où $a_n = 1$, on dit que le polynôme est **unitaire** et on conviendra encore que le **polynôme nul** a pour degré $-\infty$ de sorte que :

$$deg(P) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \text{ et si } P \neq 0, \text{ alors } P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

Propriété 9 (structure algébrique)**.**

En notant encore $+$, $\times$ et $.$ les lois usuelles sur les fonctions polynômes, alors on peut montrer que $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ désigne une $\mathbb{K}$-**algèbre commutative**, c'est à dire :

$$\begin{cases} (\mathbb{K}[X], +, \times) \text{ est un } \textbf{anneau commutatif}. \\ (\mathbb{K}[X], +, .) \text{ est un } \mathbb{K}\textbf{-espace vectoriel}. \end{cases}$$

Remarque Par construction de $\mathbb{K}[X]$, la famille (X^k) constitue une base dénombrable de l'espace et en notant $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ engendré par la base canonique des monômes $(1, X, \ldots, X^n)$... mais ce n'est pas la seule base :

Propriété 10 (famille de polynômes échelonnés en degré)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et notons $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes échelonnés en degré, c'est à dire tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $deg(P_k) = k$. Alors,

1. $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
2. $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est encore une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

▶ *Pour le premier point, il suffit de revenir à l'étude d'une famille libre. Le second point est immédiat.*

En effet,

1. *Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe des scalaires non tous nuls et on note :*
$$k_0 = \max\{k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$$
Alors, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k P_k = 0$. On en déduit par passage au degré :
$$deg(\sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k P_k) = k_0 = -\infty \text{ ce qui est impossible}$$
Ainsi, tous les scalaires sont nuls et la famille est libre.
2. *C'est immédiat : on a une famille de $n+1$ vecteurs indépendants dans un espace de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

2.2 Division euclidienne et idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Définition Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A dans $\mathbb{K}[X]$, que l'on note $B|A$, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. Dans ce cas, on dit que B est un **diviseur** de A ou que A est un **multiple** de B.

Remarque Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On notera D_B les diviseurs de B et $A\mathbb{K}[X]$ les multiples de A. En particulier, on a immédiatement :

- $0\mathbb{K}[X] = \{0\}$ et $D_0 = \mathbb{K}[X]$,
- pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^* \subset D_A$.

Exemple 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $X-1 \mid X^n - 1$.

Théorème 11 (de la division euclidienne).

Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, il existe un unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ deg(R) < deg(B) \end{cases}$$

Dans tous les cas, Q et R seront appelés le **quotient** et le **reste** dans la **division euclidienne de** A **par** B.

► *On commence par l'unicité d'un tel couple. On prouve son existence par récurrence forte sur $n = deg(A) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et on initialisera la récurrence aux cas $n < deg(B)$.*

En effet,

- ***Unicité :*** *si (Q,R) et (Q',R') désignent deux couples satisfaisant les conditions du théorème, alors :*

$$BQ + R = BQ' + R' \Leftrightarrow B(Q-Q') = R' - R$$

Par passage au degré, on a alors : $deg(B) + deg(Q-Q') = deg(R'-R) \leq \max(deg(R), deg(R')) < deg(B)$. D'où, $deg(Q-Q') < 0$ ce qui entraîne $Q - Q' = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et ainsi, $Q = Q'$. En rinjectant, on trouve aussi $R = R'$.

- ***Existence :*** *B étant fixé non nul, on note $p = deg(B) \geq 0$ et on raisonne par récurrence su $n = deg(A) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$.*
Si $n < p$, alors le couple $(Q,R) = (0,A)$ convient immédiatement.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que le résultat est vrai pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n et on considère A de degré $n+1$. On raisonne par disjonction des cas :
∗ si $n+1 < p$, alors c'est encore immédiat et le couple $(Q,R) = (0,A)$ convient.
∗ si $n+1 > p$, on peut écrire :

$$A = a_{n+1}X^{n+1} + \dots \quad \text{et } B = b_p X^p + \dots$$

et on définit $C = A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B$. Dans ce cas, C désigne un polynôme de degré $\leq n$ et par hypothèse de récurrence, il existe (Q,R) tel que : $C = BQ + R$ avec $deg(R) < deg(B)$, mais alors en isolant A, il vient :

$$A = C + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B = B(Q + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}) + R \text{ avec } deg(R) < deg(B)$$

ce qui livre l'hérédité dans le deuxième cas.
Par principe de récurrence, c'est donc vrai pour tout polynôme A de degré $n \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$.

Remarque On en déduit alors immédiatement que pour tout $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $B \neq 0$:

$$B|A \Leftrightarrow R = 0, \text{ où } R \text{ désigne le reste dans la division euclidienne de } A \text{ par } B$$

Définition On appelle **idéal de** $\mathbb{K}[X]$ tout sous-groupe additif I de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant en plus :

$$\forall\, A \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, B \in I,\ A \times B \in I$$

On dit aussi que I est **absorbant**.

Théorème 12 (caractérisation des idéaux).

Soit I un ensemble non vide tel que $I \subset \mathbb{K}[X]$. Alors,

$$I \text{ est un idéal de } \mathbb{K}[X] \ \Leftrightarrow\ \exists\, P \in I,\ I = P\mathbb{K}[X]$$

On dit que I désigne un **idéal principal** engendré par P.

► *On procède par double implication, et on fera appel pour le sens direct au théorème de la division euclidienne.*

Remarque En fait, on vient de munir l'anneau $\mathbb{K}[X]$ d'une structure euclidienne, et en s'inspirant de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$, on peut alors reconstruire toutes les notions d'arithmétique et aller chercher des théorèmes analogues, adaptés évidemment aux polynômes à une indéterminée.

Définition Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On appelle alors **diviseurs communs à** A **et** B les polynômes appartenant à l'ensemble $D_A \cap D_B$, qu'on notera $D_{A,B}$.

Propriété 13 (conséquences immédiates).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

(i) $D_{A,0} = D_A$ et $D_{A,B}$ est non vide puisque $\mathbb{K}^* \subset D_{A,B}$

(ii) si de plus $A = BQ + R$ avec $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ alors : $D_{A,B} = D_{B,R}$.

Définition Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls. On appelle alors **PGCD de** A **et** B, noté $pgcd(A, B)$, le polynôme unitaire de plus haut degré qui divise A et B.

Théorème 14 (interprétation ensembliste du PGCD).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls.

1. Alors, il existe un unique polynôme unitaire $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$.
2. Et dans ce cas, $D = pgcd(A, B)$.

► *On procède par existence et unicité : seule l'existence est astucieuse puisqu'il suffit de montrer que $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.*

Corollaire 15 (coefficients de Bézout).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls, et dont on note $D = pgcd(A, B)$. Alors, il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que : $AU + BV = D$. Une telle égalité est appelée **égalité de Bézout** et le couple (U, V) désigne des **coefficients de Bézout**.

Propriété 16 (détermination du PGCD par l'algorithme d'Euclide).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls. On définit la suite des restes (R_n) par récurrence :

$$\begin{cases} R_0 = A, \ R_1 = B \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ R_{n+2} \text{ est le reste dans la division euclidienne de } R_n \text{ par } R_{n+1} \end{cases}$$

Alors, il existe un rang p à partir duquel la suite est nulle; et dans ce cas, le PGCD de A et B est le dernier reste non nul rendu unitaire : $pgcd(A, B) = R_{p-1}/dom(R_{p-1})$.

► *On procède en deux temps: on montre d'abord que $(deg(R_n))$ définit une suite strictement décroissante de $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, puis on démontre l'égalité en utilisant la relation $D_{A,B} = D_{B,R}$.*

Exemple 4 Déterminer le PGCD des polynômes : $X^5 + 2X^3 - X^2 + X - 1$ et $X^3 - X^2 + X - 1$.

Définition On dit que les polynômes A et B sont **premiers entre eux** si $pgcd(A, B) = 1$, c'est à dire que 1 est le seul polynôme unitaire qui divise A et B.

Théorème 17 (théorème de Bézout).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont des polynômes premiers entre eux } \Leftrightarrow \exists\, (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2, \ AU + BV = 1$$

► *On procède par double implication... le sens direct est immédiat et provient de la définition du pgcd de deux polynômes.*

Exemple 5 Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Montrer que $X - a$ et $X - b$ sont premiers entre eux.

Remarques

1. D'ailleurs, on peut étendre cette définition :
les polynômes $P_1, \dots, P_n$ sont dits **premiers entre eux dans leur ensemble** si $pgcd(P_1, \dots, P_n) = 1$. Par contre, on distinguera la notion d'**entiers premiers entre eux deux à deux** tels que pour tous i, j, $P_i \wedge P_j = 1$ et on retiendra:
$$(P_i) \text{ premiers entre eux deux à deux} \Rightarrow (P_i) \text{ premiers entre eux dans leur ensemble}$$

2. Cette caractérisation des polynômes premiers entre eux est fondamentale, car elle va nous permettre de démontrer de nombreux résultats très pratiques que ce soit en arithmétique ou plus tard en algèbre linéaire...

Propriété 18 (théorème de Gauss).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls et $C \in \mathbb{K}[X]$.
$$\begin{cases} A|BC \\ pgcd(A,B) = 1 \end{cases} \Rightarrow A|C$$

▶ *Partant du théorème de Bézout, on se ramène au polynôme C.*

Propriété 19 (autre conséquence).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls et $C \in \mathbb{K}[X]$.
$$\begin{cases} A|C \\ B|C \\ pgcd(A,B) = 1 \end{cases} \Rightarrow AB|C$$

▶ *Partant du théorème de Bézout, on se ramène au polynôme C.*

Remarque Cette propriété se généralise par récurrence, et par exemple on a déjà vu : si $A_1|C, \dots, A_n|C$ avec $A_1, \dots, A_n$ premiers entre eux deux à deux, alors $\prod_{i=1}^n A_i|C$. C'est même cette propriété qui nous permet de faire passer l'hérédité dans le **théorème de décomposition des noyaux généralisé** !

Propriété 20 (caractérisation du pgcd).

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls et $D \in \mathbb{K}[X]$ qu'on suppose unitaire. Alors :
$$D = pgcd(A,B) \Leftrightarrow \exists\, (A', B') \in (\mathbb{K}[X])^2, \begin{cases} A = DA' \\ B = DB' \\ pgcd(A', B') = 1 \end{cases}$$

▶ *On procède par double implication. Dans les deux sens, on fera intervenir astucieusement le théorème de Bézout.*

Remarque On pourra notamment utiliser le pgcd de deux polynômes pour simplifier des **fractions rationnelles**. Si $pgcd(A,B) = D$, alors il existe $A', B' \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux de sorte que :
$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$
On dit encore que $\dfrac{A'}{B'}$ désigne la **forme irréductible** de la fraction rationnelle.

2.3 Racines d'un polynôme

Définition Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'on identifie à sa fonction polynôme associée et $a \in \mathbb{K}$. On dit alors que a désigne une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Propriété 21 (caractérisation d'une racine).

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $a \in \mathbb{K}$. Alors :
$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a)|P \text{ dans } \mathbb{K}[X]$$

► *Il suffit d'écrire la division euclidienne de P par $X - a$ et de traduire la divisibilité annoncée en terme de fonctions polynômes associées.*

Propriété 22 (caractérisation de racines distinctes)**.**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des scalaires distincts. Alors :

$$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_n) = 0 \Leftrightarrow (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n)|P \text{ dans } \mathbb{K}[X]$$

► *On procède par double implication. Si le sens réciproque est immédiat, on s'appliquera dans le sens direct et on pourra prouver cette implication par récurrence sur le nombre de racines.*

Propriété 23 (nombre de racines)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
2. On en déduit alors que le seul polynôme admettant plus de racines que son degré est le polynôme nul.

► *Ce résultat découle simplement de la propriété précédente à partir de laquelle on raisonnera sur les degrés.*

Déterminer les racines d'un polynôme revient donc à déterminer les zéros de la fonction polynôme associée, mais le nombre de ces racines dépendra directement du corps de base $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille :

Exemple 6 On considère le polynôme $A(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X$.

1. Déterminer les racines éventuellement complexes de A.
2. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A|P_n = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$$

Remarque Quand le polynôme donné est à coefficients réels, on pourra en outre retenir que :

$$P(z_0) = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k = 0 \Rightarrow P(\overline{z_0}) = 0$$

Ainsi, si z_0 est une racine complexe de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P.

Définition Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'on identifie à sa fonction polynôme associée et $a \in \mathbb{K}$. On dit plus généralement que a est **racine de P d'ordre de multiplicité** $r \geq 1$ si :

$$\begin{cases} (X-a)^r | P \\ (X-a)^{r+1} \nmid P \end{cases}$$

Une telle racine sera aussi appelée **racine multiple d'ordre** r et r désigne la **valuation** de a dans P.

Théorème 24 (formule de Taylor exacte)**.**

Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\dfrac{(X-a)^k}{k!}$. En particulier, pour $a = 0$, on peut identifier les coefficients de P et en notant $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients, on a :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

► *On reconnait ici une famille de polynômes échelonnés en degré, il suffit alors de déterminer les composantes qui permettent la décomposition de P dans cette base.*

Corollaire 25 (caractérisation d'une racine multiple)**.**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$. Alors, a est racine multiple d'ordre $r \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0 \\ P^{(r)}(a) \neq 0 \end{cases}$.

► *On procède par double implication : dans un sens, on fera appel à la formule de Leibniz. Dans l'autre sens, c'est immédiat si on se ramène à la formule de Taylor exacte.*

Exemple 7 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que 1 est racine double de $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.
2. Démontrer que le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Remarques

1. On retrouve ici le vocabulaire déjà rencontré pour les polynômes du second degré : quand $\Delta = 0$, on parle de **racine double** car $P(z_0) = P'(z_0) = 0$.
2. Quand le polynôme donné est à coefficients réels, alors les polynômes dérivés aussi de sorte que cette caractérisation nous permet d'affirmer :

$$z_0 \text{ est une racine complexe d'ordre } r \Rightarrow \overline{z_0} \text{ est aussi une racine multiple d'ordre } r$$

2.4 Théorème de D'Alembert-Gauss et factorisation

Définition Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré ≥ 1. On dit que P est **irréductible sur** $\mathbb{K}$ si ses seuls diviseurs sont $1, P$ ou les polynômes qui leur sont associés, c'est à dire :

$$\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X],\ P = AB \Rightarrow deg(A) = 0 \text{ ou } deg(B) = 0$$

Théorème 26 (de D'Alembert-Gauss)**.**

On admet que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine sur $\mathbb{C}$, et ainsi il peut toujours s'écrire sous une forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = a_n(X - r_1)^{\alpha_1} \dots (X - r_k)^{\alpha_k}$$

avec $r_1, \dots, r_k$ des racines éventuellement complexes d'ordre $\alpha_k \geq 1$ et a_n le coefficient dominant de P.

Remarque Ce dernier résultat est admis pour le moment et on en verra une démonstration plus tard à l'aide des intégrales à paramètre. Par contre, il ne faudra pas avoir peur de l'évoquer quand on se plonge dans $\mathbb{C}$ pour déterminer les racines éventuelles d'un polynôme donné.

Propriété 27 (caractérisation des polynômes irréductibles)**.**

1. Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{C}$ si et seulement s'il est de degré 1.
2. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il est de degré 1 ou de degré 2 à discriminant < 0.

► *On veillera à traiter les deux sens de ces équivalences : on citera évidemment le théorème de D'Alembert-Gauss quand celui-ci sera utile.*

Corollaire 28 (de factorisation des polynômes sur $\mathbb{R}$)**.**

D'après le théorème de D'Alembert-Gauss et en regroupant les facteurs de racines conjuguées, on en déduit que tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P(X) = a_n(X - r_1)^{\alpha_1} \dots (X - r_k)^{\alpha_k}(X^2 + s_{k+1}X + t_{k+1})^{\alpha_{k+1}} \dots (X^2 + s_pX + t_p)^{\alpha_p}$$

avec $r_1, \dots, r_k$ des racines réelles d'ordre $\alpha_k \geq 1$, $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p \geq 1$ et a_n le coefficient dominant de P.

Remarque Dans le cas particulier où un polynôme P peut s'écrire dans $\mathbb{K}[X]$ de la forme :

$$P(X) = a_n(X - r_1) \dots (X - r_n) \text{ avec } r_1, \dots, r_n \text{ des racines distinctes}$$

on dit plus précisément que P est **scindé à racines simples** et il est alors très facile d'exhiber des **relations entre les coefficients du polynôme et les racines** :

$$P(X) = a_nX^n \underbrace{-a_n(\sum_{i=1}^{n} r_i)}_{a_{n-1}}X^{n-1} + \underbrace{a_n(\sum_{1 \leq i < j \leq n} r_ir_j)}_{a_{n-2}}X^{n-2} - a_n(\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} r_ir_jr_k)X^{n-3} \dots + \underbrace{(-1)^n a_n r_1 \dots r_n}_{a_0}$$

Exemple 8 Pour chacun de ces polynômes, déterminer sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $P_1(X) = X^5 - 1$
2. $P_2(X) = X^6 + 1$
3. $P_3(X) = \sum_{k=0}^{2n-1} X^k$

3 Quelques applications fondamentales

3.1 Existence et unicité du polynôme d'interpolation

Exemple 9 Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et considérons $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ des points de I.

1. Montrer qu'il existe une famille de polynômes $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :
$$\forall (i,k) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(x_k) = \delta_{ik}$$
Ces polynômes sont appelés les **polynômes de Lagrange** associés aux points (x_k).
2. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ désigne une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(x_k) = f(x_k)$.
On pourra procéder de quatre façons...

Cet unique polynôme P_n qui coïncide avec f aux points $x_0, \ldots, x_n$ est appelé **polynôme d'interpolation**.

Théorème 29 (existence et unicité du polynôme d'interpolation)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et considérons $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ des points de I. Alors, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(x_k) = f(x_k)$$

3.2 Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment

Exemple 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la famille des **polynômes de Bernstein** de degré n par :
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ B_{nk} = \tbinom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n B_{nk}$, $\sum_{k=0}^n kB_{nk}$.
2. De la même façon, calculer $\sum_{k=0}^n k(k-1)B_{nk}$, puis en déduire que $\sum_{k=0}^n k^2 B_{nk} = n(n-1)X^2 + nX$.
3. On considère une fonction $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur $[0,1]$ et on définit la suite de polynômes (P_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) B_{nk}(x)$$
   (a) Soit $x \in [0,1]$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n (x - \dfrac{k}{n})^2 B_{nk}(x)$.
   (b) Fixons $\epsilon > 0$. En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[0,1]$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}\ \text{, avec } M = \|f\|_\infty$$
   (c) En déduire que :
$$\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit qu'il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction f continue sur le segment $[0,1]$. On peut adapter cet exercice et obtenir un résultat plus général : c'est le **théorème de Stone-Weiertsrass**.

Théorème 30 (de Stone-Weierstrass)**.**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur $[a,b]$. Alors, il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[a,b]$ de sorte que :
$$\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.3 Famille de polynômes orthogonaux : le cas particulier des polynômes de Tchebychev

Exemple 11 On travaille dans $E=\mathbb{R}[X]$ et on définit sous réserve d'existence l'application $\phi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\phi(P,Q)=\int_{-1}^{1} P(t)Q(t).\omega(t)\,dt,\ \text{avec pour tout } t\in]-1,1[,\ \omega(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

1. Montrer que ϕ est bien définie sur E^2, puis vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ T_n(\cos(x))=\cos(nx)$$

On appelle alors **suite des polynômes de Tchebychev** la suite des polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}_n[X]^{\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifiant :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ T_n(X)=\sum_{p=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2p}(X^2-1)^p X^{n-2p}$$

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_{n+2}(X)=2XT_{n+1}(X)-T_n(X)$.
4. Déterminer le coefficient dominant de T_n et le degré de T_n.
5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de T_n, puis en déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Etablir alors que (T_n) définit une base orthogonale de E.

Plus généralement, on peut considérer d'autres intégrales généralisées de la forme :

$$\int_I P(t)Q(t).\omega(t)\,dt$$

avec des poids ω différents. Ainsi, dans de nombreux exercices, on sera amené à construire des suites de **polynômes orthogonaux** et qui constitueront une base dénombrable fort utile.