Chapitre 3

Séries numériques et vectorielles

A l'instar du chapitre précédent, on présente ici les séries dans le cadre plus général des espaces vectoriels normés, puis on aborde le cas particulier des séries numériques pour lesquelles on aura de nombeux outils de comparaison pour en déterminer la nature.

Programmes 2022

Pour aller plus loin

Encore une fois, on revient sur les théorèmes de première année en cherchant à aller plus loin, puisqu'au delà de la nature d'une série, on cherche souvent à en préciser la façon dont elle converge ou diverge : c'est même l'intérêt de tous ces théorèmes de comparaison. Par contre, on prêtera une attention particulière aux séries absolument convergentes car elles fournissent deux théorèmes essentiels : le théorème de Fubini pour manipuler les sommes doubles et le résultat relatif au produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Les espaces vectoriels considérés ici sont réels ou complexes et $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite des sommes partielles (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On note cette série $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_n) converge dans E et dans ce cas, on appelle encore :

- **somme de la série** la limite dans E de la suite (S_n) et celle-ci sera encore notée : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- **suite des restes partiels** la suite (R_n) de $E^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Sinon, si elle ne converge pas, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Remarques

1. La relation entre suites et séries est très étroite, puisqu'étudier une série revient finalement à étudier la suite des sommes partielles (S_n) associées : on retrouvera donc les résultats précédents sur les suites d'un espace vectoriel normé.

   Réciproquement, si on considère une suite (u_n), alors on peut écrire :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}}_{S_{n-1}} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1}$$

   et ainsi, la suite (u_n) est de même nature que la **série télescopique** $\sum u_n - u_{n-1}$. C'est même un résultat fort pratique qu'il faudra retenir.

2. Le reste partiel tend évidemment vers 0, et il nous permet de mesurer l'erreur entre la somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et son approximation S_n.

Propriété 1 (linéarité de la somme).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k + v_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

► *C'est immédiat : on revient à la somme partielle et on passe à la limite par opérations sur les limites dans un espace vectoriel normé.*

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + v_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \longrightarrow \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Propriété 2 (condition nécessaire de convergence).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \longrightarrow 0$.
Dans le cas contraire, la série diverge et on dit même qu'elle **diverge grossièrement**.

► *C'est immédiat, il suffit d'écrire u_n en fonction de (S_n).*

En effet, pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$.

Remarque On fera très attention : il s'agit seulement d'une **condition nécessaire**, et il faudra être capable de justifier que le sens réciproque est faux. On pourra citer l'exemple fondamental de la **série harmonique** :

Exemple 1 On se place dans $(\mathbb{R}, |.|)$ et on définit la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. (a) Etablir rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
   (b) En déduire un équivalent de H_n et préciser la nature de la série $\sum 1/n$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$. Montrer que (u_n) est convergente et en notant γ sa limite, justifier que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

La constante $\gamma \simeq 0,577$ est appelée **constante d'Euler** et cette égalité nous donne le **développement asymptotique de la série harmonique en** $o(1)$.

2 Séries numériques à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Comme au premier chapitre, $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathbb{C}, |.|)$ étant des espaces vectoriels normés, les résultats précédents sont vraies. D'ailleurs, on apprendra à reconnaître quelques exemples de référence.

2.1 Exemples de référence

Propriété 3 (nature des séries géométriques).

Soit $q \in \mathbb{C}$. On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum q^n$, et on a :

$$\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1$$

De plus, on a dans ce cas :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

► *On écrit la somme partielle et on reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.*

En effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & si\ q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & sinon \end{cases}$$

et ainsi, pour $q = 1$, la série diverge immédiatement. Sinon, la suite (S_n) converge si et seulement si (q^{n+1}) converge, c'est à dire si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on retrouve par passage à la limite, S, puis on en déduit R_n.

Propriété 4 (nature des séries exponentielles).

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **série exponentielle** toute série de la forme $\sum \frac{z^n}{n!}$ et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sum \frac{z^n}{n!} \text{ converge avec } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

► *Pour z fixé, on pose $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{zx}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On peut alors appliquer la formule de Taylor avec reste intégral en 0, avant de l'évaluer en $x = 1$ pour reconnaître la somme partielle.*

Propriété 5 (nature des séries de Riemann de paramètre réel).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **série de Riemann** toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^x}$ et on a :

$$\sum \frac{1}{n^x} \text{ converge } \Leftrightarrow x > 1$$

Et dans ce cas, on définit la fonction *zeta* de Riemann sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

▶ *On raisonne par disjonction des cas en écartant rapidement les cas $x < 0$ et $x = 0$ pour lesquels la série diverge grossièrement. Le reste tombe alors par comparaison série-intégrale.*

Remarque On ne confondra pas avec les **sommes de Riemann** qui permettent d'approcher l'intégrale d'une fonction continue sur un segment :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f(\theta_k) \longrightarrow \int_a^b f, \text{ où pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k \leq \theta_k \leq x_{k+1}$$

avec (x_k) la subdivision à pas constant sur le segment $[a, b]$.

Théorème 6 (de Césaro).

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose convergente de limite ℓ. Alors, la **moyenne de Césaro** associée est convergente de sorte que:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

▶ *On revient à la définition de la limite et on cherche à contrôler la différence $|(1/n) \sum_{k=1}^{n} u_k - \ell|$ en séparant la somme obtenue.*

Remarques

1. La réciproque est fausse : on peut considérer la suite $u_n = (-1)^n$ dont les sommes partielles associées sont bornées, et donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow 0$, mais (u_n) est divergente.
2. En fait, ce résultat peut être intéressant pour des séries divergentes car il nous livre un équivalent de la somme partielle. En particulier, si $u_n \longrightarrow \ell \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \ell \text{ et par conséquent : } S_n \sim n\ell$$

2.2 Cas particulier des séries à termes positifs

Propriété 7 (caractérisation de la convergence par majoration).

Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs. Alors, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante et on a :

$$(S_n) \text{ converge } \Leftrightarrow (S_n) \text{ est majorée}$$

et dans ce cas, la série converge vers $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup S_n$. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

▶ *C'est immédiat : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Ainsi, (S_n) est croissante et on retrouve le théorème de la limite monotone.*

Corollaire 8 (comparaison pour les séries à termes positifs).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

1. Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

▶ *Il suffit de sommer les inégalités pour comparer les sommes partielles.*

En effet, en sommant celles-ci, on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Si la série $\sum v_n$ *à termes positifs converge, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$ *et le résultat précédent nous permet de conclure.*

De la même façon, pour le second point, en tant que série à termes positifs, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)$ *diverge nécessairement vers* $+\infty$. *Par comparaison, la suite* $(\sum_{k=0}^{n} v_k)$ *diverge aussi vers* $+\infty$.

Remarque On peut même supposer que l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.
En effet, dans ce cas, on obtient des résultats analogues pour les séries $\sum_{n \geq N} u_n$ et $\sum_{n \geq N} v_n$, mais la nature d'une série ne dépendant pas des premiers termes, on récupère quand même les mêmes conclusions :

1. si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geq N} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq N} u_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
2. si $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum_{n \geq N} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_{n \geq N}$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Propriété 9 (comparaison pour les séries à termes positifs)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

1. Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente et on a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$.
2. Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente et on a : $\sum_{k=0}^{n} u_k = o(\sum_{k=0}^{n} v_k)$.

Et de la même façon, si $u_n = O(v_n)$, on peut aussi comparer les restes ou sommes partielles des deux séries.

▶ *On traduit simplement la relation de comparaison et on invoque la propriété précédente. Pour la comparaison sur les restes ou sommes partielles, on reviendra à la définition de la limite avant de sommer les inégalités à partir du rang donné.*

Ces résultats sont très utiles, car ils nous permettent souvent de conclure par comparaison à nos séries de référence. Par exemple, il peut être malin de trouver $\alpha > 1$ tel que $n^{\alpha} u_n \longrightarrow 0$. Dans ce cas, pour des séries à termes positifs, il vient :

$$u_n = o(\frac{1}{n^{\alpha}}) \text{ et par comparaison aux séries de Riemann, } \sum u_n \text{ converge}$$

Exemple 2 Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature des séries dont on donne ici le terme général :
$$u_n = \frac{\sin(1/n)}{n^2}, \quad v_n = n\sin(1/n), \quad w_n = \frac{\arctan(n)}{n+1} e^{-n^2}, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}, \quad y_n = \frac{1}{n^{\beta}\ln(n)} \text{ avec } \beta > 1$$
2. En utilisant le théorème de sommation des o, retrouver une preuve plus rapide du théorème de Césaro.

Théorème 10 (de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et on a encore :

1. si les deux séries convergent, on peut comparer les restes partiels : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
2. si les deux séries divergent, on peut comparer les sommes partielles : $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

▶ *On traduit encore la relation de comparaison et on invoque la propriété sur les inégalités entre termes généraux. Pour la comparaison sur les restes ou sommes partielles, il suffit d'adapter la preuve précédente et sommer l'encadrement fourni par la relation.*

Propriété 11 (technique de comparaison série-intégrale).

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qu'on suppose motonotone. Alors,

1. si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)\, dt \leq f(n+1)$$

2. si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\, dt \leq f(n)$$

et sous réserve d'existence, on peut obtenir un encadrement des restes partiels ou sommes partielles de la série $\sum f(n)$.

► *C'est immédiat, puisque la monotonie de f nous donne des ingéalités sur $[k, k+1]$ et par croissance de l'intégrale, on retrouve l'encadrement attendu.*

Remarque Cette **méthode de comparaison série-intégrale** est très pratique et il nous faudra, à chaque fois, reconstruire l'encadrement en toute rigueur. D'ailleurs, elle nous permet d'encadrer la somme partielle ou le reste partiel, à condition de pouvoir calculer l'intégrale associée.
C'est notamment le cas des séries de Riemann qu'il faudra savoir refaire rapidement.

Propriété 12 (équivalents du reste partiel ou de la somme partielle associée aux séries de Riemann).

On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Alors, on rappelle que la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.
De plus,

1. si $\alpha = 1$, alors la série diverge et on a : $S_n \sim \ln(n)$.
2. si $0 < \alpha < 1$, alors la série diverge et on a : $S_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
3. si $\alpha > 1$, alors la série converge et on a : $R_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

► *Le premier point a déjà été traité : c'est l'exemple de la série harmonique. Pour les deux autres points, on travaille par comparaison série-intégrale avec $f : t \longmapsto 1/t^\alpha$ strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*

On applique le résultat précédent pour préciser le développement asymptotique de la série harmonique, mais on retiendra d'abord comment on ruse pour étudier les quantités négligeables $(u_n), (v_n)$: on se ramène simplement à l'étude de la série télescopique associée avant d'invoquer le théorème de sommation des équivalents.

Exemple 3 On considère la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ et on rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln(n) - \gamma$.
   (a) Montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$.
   (b) En déduire le développement asymptotique de H_n en $o(\frac{1}{n})$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \dfrac{1}{2n}$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{6n^3}$.
   (b) En déduire que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Cette égalité nous donne le **développement asymptotique de la série harmonique en** $o(\frac{1}{n^2})$.

2.3 Cas plus général des séries à valeurs quelconques

Théorème 13 (condition suffisante de convergence)**.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. Dans $\mathbb{R}$, si la série $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^+ - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^-$$

2. Dans $\mathbb{C}$, si la série $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} Re(u_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} Im(u_k)$$

Autrement dit, pour des séries à valeurs réelles ou complexes, la **convergence absolue** entraine la convergence.

▶ *On traite d'abord le cas réel pour lequel on introduit les suites (u_n^+) et (u_n^-) telle que $u_n = u_n^+ - u_n^-$, puis on montre par comparaison qu'elles désignent des termes généraux de séries convergentes avant de conclure par linéarité. On procède alors de la même façon dans $\mathbb{C}$ en utilisant cette fois les suites $(Re(u_n))$ et $(Im(u_n))$.*

Remarques

1. C'est un théorème efficace : en passant ainsi en valeur absolue ou en module, on est alors ramené aux cas des séries à termes positifs pour lesquelles on a tous les théorèmes de comparaison.

2. Cependant, on fera attention, car il s'agit cette fois d'une **condition suffisante** de convergence. En particulier, la réciproque est fausse et on pourra exhiber des séries **semi-convergentes**, c'est à dire qui convergent alors qu'elles divergent en valeur absolue.

Exemple 4 On considère la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à $f : x \longmapsto \ln(1 + x)$, établir que la série harmonique alternée est convergente, puis préciser sa limite.

2. Justifier alors que la série est semi-convergente, au sens où elle n'est pas absolument convergente.

Propriété 14 (règle de D'Alembert)**.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On définit le rapport de D'Alembert $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ et on suppose que :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \longrightarrow \ell$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument, et donc elle est convergente.

2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3. Si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

▶ *On raisonne par disjonction des cas, et on cherche dans les deux premiers cas à comparer $|u_n|$ au terme général d'une série géométrique. Pour le dernier cas, on propose quelques séries de Riemann dont le rapport tend vers 1 et pour lesquelles tout est possible.*

La règle de D'Alembert est très pratique, surtout lorsque le terme général est donné sous la forme d'un produit, de puissances ou avec des termes en factorielle... D'ailleurs, on pourra aussi utiliser la **formule de Stirling** qui livre un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Exemple 5 On considère la série de terme général $u_n = \frac{(2n)!}{n! a^n n^n}$, $a > 0$. Déterminer la nature de la série en fonction de a.

Propriété 15 (critère spécial des séries alternées).

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une série alternée, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leq 0$. On suppose de plus que la suite $(|u_n|)$ est décroissante avec $|u_n| \longrightarrow 0$. Alors,

1. la série $\sum u_n$ est convergente.
2. on peut contrôler le reste partiel en valeur absolue et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$$

► *Pour le premier point, il suffit de montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avant d'invoquer le théorème de convergence des suites adjacentes. Pour le second point, on distingue alors les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$ à partir de l'encadrement fourni par le théorème de convergence des suites adjacentes.*

Remarques

1. Ce second résultat est fondamental. D'une part, il nous donne une information sur la vitesse de convergence de (S_n) vers sa limite S, et d'autre part, cette majoration pourra nous donner un mode de convergence très satisfaisant dans le cas des séries de fonctions.
2. On peut aussi prolonger cette dernière inégalité à la somme de la série, en effet la série étant alternée, on peut par exemple supposer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} \geq 0$ et $u_{2p+1} \leq 0$, et ainsi,

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + R_0$$

avec $R_0 = S - S_0 \leq 0$. Or d'après le résultat précédent, $|R_0| \leq |u_1| \leq |u_0|$ et donc,

$$0 \leq S \leq u_0$$

On peut procéder de la même façon si les termes d'indices pairs sont négatifs et on obtiendrait $u_0 \leq S \leq 0$. Ainsi, on retiendra que, sous les hypothèses du critère spécial :

- la somme S est toujours du signe de u_0,
- on peut toujours prolonger la majoration donné par le critère de sorte que : $|S| = |\sum_{k=0}^{+\infty} u_k| \leq |u_0|$

De nombreuses séries se présentent directement sous la forme $\sum(-1)^n u_n$ avec (u_n) de signe constant, et il suffira de vérifier les deux hypothèses du critère spécial pour en obtenir la convergence. Mais il y en a d'autres pour lesquelles l'alternance des signes est moins évidente... on restera donc vigilant et en cas de difficultés, il ne faudra pas hésiter à aller chercher un **développement asymptotique** du terme général pour faire apparaître des termes plus simples à manipuler.

Exemple 6 Déterminer la nature des séries dont on donne ici le terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^x} \text{ avec } x \in \mathbb{R}, \quad w_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n}), \quad x_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}), \quad y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

3 Cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Alors, pour toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, il existe des **suites composantes** $(u_{1,n}), \dots, (u_{p,n}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_{1,n}e_1 + \dots + u_{p,n}e_p$$

et ainsi, la série $\sum u_n$ est définie par la combinaison des sommes partielles associées :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_{1,k}}_{S_{1,n}} e_1 + \dots + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_{p,k}}_{S_{p,n}} e_p$$

Remarque Etant en dimension finie, on peut affirmer que la série vectorielle $\sum u_n$ converge si et seulement si les suites $(S_{1,n}), \dots, (S_{p,n})$ convergent. Et ainsi, l'étude de ces séries revient à l'étude des séries composantes associées.

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On dit encore que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 16 (condition suffisante de convergence en dimension finie).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

► *On revient à l'étude des séries composantes, et en dimension finie, on pourra se ramener à la norme infinie et utiliser le résultat de la convergence absolue sur les composantes.*

Pour cela, on rappelle qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq \beta\|x\|$$

En particulier, on a par définition : $u_n = u_{1,n}e_1 + \ldots + u_{p,n}e_p$, et donc, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $|u_{i,n}| \leq \|u_n\|_\infty \leq \beta\|u_n\|$.
Or la série $\sum u_n$ étant absolument convergente, il vient par comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\sum |u_{i,n}| \text{ converge } \Rightarrow \sum u_{i,n} \text{ converge}$$

Finalement, toutes les séries composantes convergent et on en déduit que la série converge dans E.

Exemple 7 On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit l'application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, et on rappelle que $\|.\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'en particulier, elle est **sous-multiplicative** :

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Fixons $A \in E$.

1. Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.
2. En déduire que la série $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ est convergente.

Remarques

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série vectorielle $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ est donc toujours convergente. Sa limite sera notée $\exp(A)$ ou e^A, et définit l'**exponentielle de la matrice** A.
2. Attention, si celle-ci existe, son calcul n'est pas toujours facile et on préfèrera plus tard réduire la matrice A avant de déterminer l'exponentielle associée : c'est là un des intérêts de la **décomposition de Dunford**.

4 Notion de familles sommables

On prolonge enfin la notation $\sum$ aux familles sommables indexées sur un ensemble dénombrable, mais cette notion est plus délicate à manipuler.

4.1 Ensembles dénombrables et opérations

Définition Soit A un ensemble non vide.

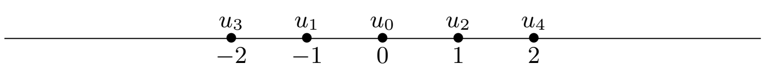
- On dit que A est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est à dire qu'il existe $u : \mathbb{N} \longrightarrow A$ telle que :

$$\forall a \in A,\ \exists! n \in \mathbb{N},\ a = u(n)$$

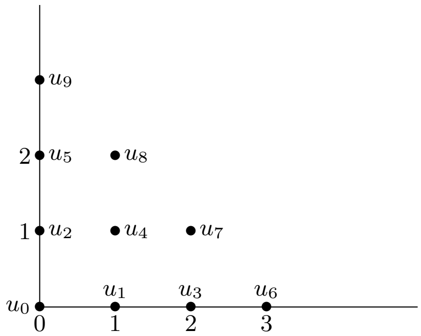
- On dit que A est **au plus dénombrable** s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarques

1. Concrètement, cela signifie qu'on peut numéroter tous les éléments distincts de A. En effet, si $A = \{u_0, u_1, \ldots\}$, alors A est fini ou bien l'application $u : \mathbb{N} \longmapsto u_n \in A$ définit une bijection naturelle de $\mathbb{N}$ sur A, et A est dénombrable.
2. On n'exige pas d'expliciter les bijections sous-jacentes, mais il faudra être capable d'expliquer comment numéroter les éléments distincts d'un ensemble pour justifier que celui-ci est bien dénombrable. En particulier, on retiendra que :
   - toute partie de $\mathbb{N}$ est évidemment au plus dénombrable, et plus généralement toute partie d'un ensemble dénombrable est aussi au plus dénombrable.
   - $\mathbb{Z}$ est dénombrable, car on peut numéroter tous les entiers relatifs de la façon suivante :



- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, car on peut numéroter tous les couples d'entiers de la façon suivante :



Propriété 17 (opérations sur les ensembles dénombrables)**.**

On admet enfin que :

- le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.
- la réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.

Remarques

1. On en déduit immédiatement que $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est dénombrable comme produit cartésien de deux ensembles dénombrables.
2. Attention, toutes les parties de $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables : on peut montrer par l'absurde que $[0,1[$ n'est pas dénombrable et donc, $\mathbb{R}$ lui-même n'est pas dénombrable.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $[0,1[= \{u_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$. En particulier, ces nombres u_n s'écrivent :
   $$\begin{cases} u_1 = 0, d_{1,1}\dots d_{1,k_1}\dots \\ u_2 = 0, d_{2,1}\dots d_{2,k_2}\dots \\ u_3 = 0, d_{3,1}\dots d_{3,k_3}\dots \\ \dots \end{cases} \quad \text{avec } d_{i,j} \text{ les décimales associées à } u_i$$
   Mais dans ce cas, on peut construire un réel $x = 0, r_1\dots r_k\dots$ en choisissant des décimales qui diffèrent des nombres (u_n), c'est à dire :
   $$r_1 \neq d_{1,1},\ r_2 \neq d_{2,2}\dots$$
   et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x\neq u_n$. Ce qui est contradictoire car $x\in[0,1[= \{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

4.2 Familles sommables et théorèmes de sommation par paquets

Définition Soit I un ensemble fini ou dénombrable, et considérons $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs. On dit que la famille est **sommable** si l'ensemble des sommes finies :
$$\{\sum_{j\in J} a_j,\ J \text{ fini},\ J\subset I\} \text{ est majoré.}$$
Dans ce cas, on appelle **somme de la famille** la borne supérieure et on note $\sum_{i\in I} a_i = \sup\{\sum_{j\in J} a_j,\ J \text{ fini},\ J\subset I\}$.

Remarques

1. Dans le cas particulier où $I=\mathbb{N}$, on retrouve évidemment le cas des séries et ainsi, pour une famille de réels positifs, (a_n) est sommable si et seulement si la série $\sum a_n$ converge et on a :
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
2. Si une famille de réels positifs $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors toute sous-famille $(a_i)_{i\in I'\subset I}$ est sommable et on a la majoration :
   $$\sum_{i\in I'} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Propriété 18 (cas particulier de la réunion d'indices)**.**

Soient I, J deux ensembles dénombrables qu'on suppose disjoints. Alors, la famille de réels positifs $(a_i)_{i\in I\sqcup J}$ est sommable si et seulement si les sous-familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$ sont sommables.
Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I\sqcup J} a_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i$$

▶ *On raisonne par double implication et on veillera à se ramener à la définition de ces familles sommables de réels positifs.*

En effet, on a :

- *si on suppose que $(a_i)_{i\in I\sqcup J}$ est sommable, alors pour toutes parties finies $I' \subset I$, $J' \subset J$, on a :*
$$\sum_{i\in I'} a_i \leq \sum_{i\in I\sqcup J} a_i \text{ et } \sum_{i\in J'} a_i \leq \sum_{i\in I\sqcup J} a_i$$
On en déduit que $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$ sont sommables. De plus, il vient :
$$\sum_{i\in I'} a_i + \sum_{i\in J'} a_i \leq \sum_{i\in I\sqcup J} a_i$$
En passant au sup sur les parties I' d'une part, puis sur les parties J', on obtient : $\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I\sqcup J} a_i$.
- *réciproquement, si les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$ sont sommables, alors on notant K' une partie finie incluse dans $I \sqcup J$, alors on peut voir $K' = I' \sqcup J'$ avec $I' \subset I$ et $J' \subset J$. En particulier,*
$$\sum_{i\in K'} a_i = \sum_{i\in I'} a_i + \sum_{i\in J'} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i$$
On en déduit que $(a_i)_{i\in I\sqcup J}$ est sommable et par passage au sup sur les parties K', $\sum_{i\in I\sqcup J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i$.

Théorème 19 (de sommation par paquets pour une famille de réels positifs)**.**

Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables deux à deux disjoints et tels que $I = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. On admet qu'on peut généraliser le résultat précédent, et ainsi la famille de réels positifs $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{les sous-familles } (a_i)_{i\in I_\lambda} \text{ sont sommables de somme } S_\lambda \\ \text{la famille des paquets } (S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ est sommable} \end{cases}$$

Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{(\sum_{i\in I_\lambda} a_i)}_{S_\lambda}$$

Définition Soit I un ensemble fini ou dénombrable, et considérons $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit plus généralement que la famille est **sommable** si la famille des réels positifs $(|a_i|)_{i\in I})$ est sommable, et on définit la somme associée par linéarité :

- dans le cas réel,
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$
- dans le cas complexe,
$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} Re(a_k) + i \sum_{k\in I} Im(a_k)$$

Remarques

1. Dans cette dernière définition, on peut remarquer que c'est la sommabilité de la famille $(|a_i|)_{i\in I})$ qui entraine par comparaison la sommabilité des familles de réels positifs (a_i^+), (a_i^-), $(|Re(a_k)|)$, $(|Im(a_k)|$ et donc, par définition des familles $(Re(a_k))$, $(Im(a_k))$.
2. Par linéarité, on peut alors prolonger le **théorème de sommation par paquets** d'abord à une famille sommable de réels quelconques, puis dans un second temps, à une famille sommable de nombres complexes. Ainsi, on retiendra que pour **une famille sommable** au sens où $(|a_i|)_{i\in I})$ est sommable, alors on peut toujours sommer par paquets et voir :
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{(\sum_{i\in I_\lambda} a_i)}_{S_\lambda}$$

4.3 Cas particulier des sommes doubles

Dans le cas particulier où la famille $(a_{p,q})$ est indexée sur $\mathbb{N}^2$, on pourra considérer différentes partitions de $\mathbb{N}^2$ avant d'invoquer le **théorème de sommation par paquets** :

$$\mathbb{N}^2 = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2\} = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}} \underbrace{\{p\} \times \mathbb{N}}_{V_p} = \bigsqcup_{q\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{N} \times \{q\}}_{H_q} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p+q=n\}}_{D_n}$$

et ainsi, on obtient les théorèmes suivants :

Théorème 20 (de Fubini pour une famille de réels positifs)**.**

Soit $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée sur $\mathbb{N}^2$. Alors, la famille est sommable si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\in\mathbb{N}} a_{p,q}$ est convergente et la série de terme général $S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ est convergente.
- pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{p,q}$ est convergente et la série de terme général $S_q = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$ est convergente.

Et dans ce cas, on a alors :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}) = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q})$$

Exemple 8 On note encore ζ la fonction de Riemann. Montrer que la série $\sum_{q\geq 2}(\zeta(q)-1)$ est convergente et préciser sa limite.

Théorème 21 (de Fubini pour une famille à valeurs quelconques)**.**

Soit $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée sur $\mathbb{N}^2$. On suppose de plus que la famille est sommable. Alors, on peut échanger les symboles de sorte que :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}) = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q})$$

Remarque Pour une telle famille de nombres réels ou complexes donnée, on procèdera donc en deux temps :

1. on vérifie la sommabilité en se ramenant à l'étude de la convergence absolue, c'est à dire qu'on vérifie si $(|a_{p,q}|)$ est sommable à l'aide du théorème de Fubini pour les familles de réels positifs,
2. puis, on peut appliquer ce second théorème de Fubini et échanger les sommes en p et q pour calculer la somme double.

Théorème 22 (produit de Cauchy)**.**

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs réelles ou complexes. On suppose de plus que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument. Alors, la famille $(u_p v_q)$ est sommable et on a :

$$(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p)(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_p v_q = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

► *On se ramène à la famille $(|u_p v_q|)$ et on applique le théorème de Fubini pour les familles de réels positifs. Une fois la famille sommable, on peut invoquer le théorème de sommation par paquets et sommer suivant les diagonales (D_n).*

Remarque En notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, on en déduit que le produit de deux séries absolument convergentes nous donne encore une série absolument convergente telle que :

$$(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p)(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

et ceci définit alors le **produit de Cauchy** des deux séries.

Exemple 9 Etablir que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$